確率

1　事象の確率

(1)　2 個のさいころを同時に投げるとき，目の和が 7 となる確率を求めよ。

(2)　3 枚の硬貨を同時に投げるとき，表が 2 枚出る確率を求めよ。

要　点

同じ条件で繰り返すことができ，その結果が偶然によって決まる実験や観測を **試行** という。
試行の結果起こる事柄を **事象** といい，A，B などの文字で表す。また，起こり得る事柄全体を **全事象** といい，U で表す。事象は集合で表すことができる。
全事象 U のただ 1 つの要素からなる事象を **根元事象** という。根元事象を 1 つも含まない事象を **空事象** といい ϕ で表す。
ある試行において，どの根元事象が起こることも同じ程度に期待できるとき，これらの根元事象は **同様に確からしい** という。

確率の定義

全事象 U の要素の個数を $n(U)$とし，事象 A の要素の個数を $n(A)$とする。全事象 U のどの根元事象も同様に確からしいとき，$\dfrac{n(A)}{n(U)}$ を事象 A が起こる **確率** といい，$P(A)$ で表す。

$$\boldsymbol{P(A)=\frac{n(A)}{n(U)}=\frac{A\text{が起こる場合の数}}{\text{起こり得るすべての場合の数}}}$$

解答

(1)　目の出方は全部で　6×6＝36（通り）
　このうち，目の和が 7 になるのは，(1，6)，(2，5)，(3，4)，(4，3)，(5，2)，(6，1) の 6 通り。
　よって，求める確率は　$\dfrac{6}{36}=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

(2)　起こり得るすべての場合の数は　$2^3=8$（通り）
　このうち，表が 2 枚出るのは（表，表，裏)，（表，裏，表)，（裏，表，表）の 3 通り。
　よって，求める確率は　$\boldsymbol{\dfrac{3}{8}}$

2　事象の確率（順列の利用）

A，B，C，D，E，F の 6 人が 1 列に並ぶとき，A と B が隣り合う確率を求めよ。

要　点

まず，すべての並び方を求める。次に条件を満たす並び方を求める。

解答

6 人が 1 列に並ぶ並び方は 6！通り。

このうち，A と B が隣り合うような並び方は，A，B の 1 組と C～F の 4 人の並び方は 5！通りで，

A，B の並び方は 2！通りあるから　5！×2！通りある。

よって，求める確率は　$\dfrac{5!\times 2!}{6!}=\dfrac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\times 2\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

3　事象の確率（組合せの利用）

赤玉 3 個と青玉 4 個が入っている袋から，2 個の玉を同時に取り出すとき，2 個の玉の色が異なる確率を求めよ。

要　点

問題文を読んだだけでは，赤玉 3 個の見た目は全て同じ，青玉も同様と考えることができる。

しかし，確率はどの根元事象も同様に確からしいときのみ求めることができる。このため，起こり得る全ての場合の数や条件を満たす場合の数を求めるときは，赤玉 3 個や青玉 4 個は，

見た目が全く同じだとしても区別して考える。

解答

玉は全て区別できると考え，7 個の玉から 2 個を取り出す場合の数は ${}_7C_2$ 通り。

このうち，3 個の赤玉から 1 個，4 個の青玉から 1 個を取り出す場合の数は　${}_3C_1\times{}_4C_1$（通り）

よって，求める確率は　$\dfrac{{}_3C_1\times{}_4C_1}{{}_7C_2}=\dfrac{3\times 4}{\frac{7\cdot 6}{2\cdot 1}}=\boldsymbol{\dfrac{4}{7}}$

4　確率の加法定理

赤玉 3 個と青玉 4 個が入っている袋から，2 個の玉を同時に取り出すとき，2 個とも同じ色である確率を求めよ。

要　点

積事象と和事象

2 つの事象 A と B において，A と B がともに起こる事象を，A と B の **積事象** といい，$\boldsymbol{A \cap B}$ と表す。
A または B が起こる事象を，A と B の **和事象** といい，$\boldsymbol{A \cup B}$ と表す。

排反事象

2 つの事象 A，B が同時に起こらないとき，すなわち，$A \cap B = \phi$ のとき，事象 A，B は互いに **排反** である，または **排反事象** であるという。

確率の基本性質

・どのような事象 A に対しても　$0 \leqq P(A) \leqq 1$
・全事象 U の確率は　$P(U) = 1$
・空事象 ϕ の確率は　$P(\phi) = 0$
・**確率の加法定理**　2 つの事象 A，B が互いに排反のとき　$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$

解答

7 個の玉から 2 個を取り出す場合の数は ${}_7\mathrm{C}_2$ 通り。
このうち，2 個とも赤玉である事象 A の起こる場合の数は ${}_3\mathrm{C}_2$ 通り。
2 個とも青玉である事象 B の起こる場合の数は ${}_4\mathrm{C}_2$ 通り。
事象 A，B は互いに排反であるから，求める確率は

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2} + \frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2} = \frac{\dfrac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1} + \dfrac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1}}{\dfrac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1}} = \boldsymbol{\frac{3}{7}}$$

$\boxed{5}$　**和事象の確率**

1 から 100 までの番号が書かれた 100 枚のカードから 1 枚引くとき，その番号が 4 の倍数または 5 の倍数である確率を求めよ。

要　点

和事象の確率　$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

解答

100 枚のカードから
4 の倍数を引く事象 A の起こる場合の数は　$A = \{4 \cdot 1,\ 4 \cdot 2,\ \cdots\cdots,\ 4 \cdot 25\}$ から　25 通り
5 の倍数を引く事象 B の起こる場合の数は　$B = \{5 \cdot 1,\ 5 \cdot 2,\ \cdots\cdots,\ 5 \cdot 20\}$ から　20 通り
また，積事象 $A \cap B$ は 20 の倍数を引く事象であるから　$A \cap B = \{20 \cdot 1,\ 20 \cdot 2,\ \cdots\cdots,\ 20 \cdot 5\}$ から　5 通り
よって，求める確率は　$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{25}{100} + \dfrac{20}{100} - \dfrac{5}{100} = \dfrac{40}{100} = \boldsymbol{\dfrac{2}{5}}$

$\boxed{6}$　**余事象の確率**

当たり 4 本を含む 10 本のくじから，同時に 3 本のくじを引くとき，少なくとも 1 本が当たりくじである確率を求めよ。

要　点

事象 A に対して，A が起こらないという事象を A の **余事象** といい，$\overline{A}$ で表す。

余事象の確率　　$\boldsymbol{P(\overline{A})=1-P(A)}$

解答

3 本のうち少なくとも 1 本が当たりくじであるという事象は，3 本ともはずれくじであるという事象 A の余事象 $\overline{A}$ である。

$P(A)=\dfrac{{}_6\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\dfrac{\dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}}{\dfrac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}}=\dfrac{1}{6}$　であるから，求める確率は　$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\dfrac{1}{6}=\boldsymbol{\dfrac{5}{6}}$

$\boxed{7}$　**独立な試行の確率**

袋 A には赤玉 3 個と白玉 4 個，袋 B には赤玉 4 個と白玉 2 個が入っている。このとき，次の確率を求めよ。

(1)　袋 A から 1 個，袋 B から 1 個の玉を取り出すとき，2 個とも白玉である確率

(2)　袋 A から 1 個，袋 B から 1 個の玉を取り出すとき，2 個とも同じ色の玉である確率

要　点

2 つ以上の試行において，どの試行の結果も他の試行の結果に影響を及ぼさないとき，これらの試行は **独立** であるという。

独立な試行の確率

2 つの試行 S，T が独立であるとき，S で事象 A が起こり，T で事象 B が起こるという事象を C とすると

$\boldsymbol{P(C)=P(A)P(B)}$

(2)　袋 A，B の両方から赤玉を取り出す事象と，両方から白玉を取り出す事象は互いに排反であることに注意する。

解答

(1)　袋Aから玉を取り出す試行と，袋Bから玉を取り出す試行は独立である。

袋Aから白玉1個を取り出す確率は　$\frac{4}{7}$

袋Bから白玉1個を取り出す確率は　$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

よって，求める確率は　$\frac{4}{7}\times\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{4}{21}}$

(2)　袋Aから玉を取り出す試行と，袋Bから玉を取り出す試行は独立である。

2個とも同じ色になるのは，袋A，Bの両方から赤玉を取り出すときと，両方から白玉を取り出すときであり，これらの事象は互いに排反である。

(ⅰ)　両方から赤玉を取り出す確率

袋Aから赤玉1個を取り出す確率は　$\frac{3}{7}$，　袋Bから赤玉1個を取り出す確率は　$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

よって，両方から赤玉を取り出す確率は　$\frac{3}{7}\times\frac{2}{3}=\frac{6}{21}$

ここでは約分をしない方が，後の計算がラクになる。

(ⅱ)　両方から白玉を取り出す確率

(1)から　$\frac{4}{21}$

したがって，2個とも同じ色になる確率は　$\frac{6}{21}+\frac{4}{21}=\mathbf{\frac{10}{21}}$

8　反復試行の確率

1個のさいころを5回続けて投げるとき，次の確率を求めよ。

(1)　5または6の目がちょうど1回出る確率

(2)　5または6の目が2回以上出る確率

要　点

同じ条件のもとで同じ試行を繰り返すとき，この一連の試行を **反復試行** という。

反復試行では，それぞれの試行は互いに独立である。

反復試行の確率

1回の試行で事象 A の起こる確率を p とする。この試行を n 回繰り返し行うとき，A がちょうど r 回起こる確率は　$\boldsymbol{{}_n\mathrm{C}_r\, p^r(1-p)^{n-r}}$

〈注意〉$p^0=1$，$(1-p)^0=1$ とする。

解答

(1)　さいころを 1 回投げたとき，5 または 6 の目が出る確率は　$\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

よって，求める確率は　${}_5C_1\left(\dfrac{1}{3}\right)^1\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^{5-1}=5\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^1\left(\dfrac{2}{3}\right)^4=\boldsymbol{\dfrac{80}{243}}$

(2)　5 または 6 の目が 2 回以上出る確率は，5 または 6 の目が 0 回または 1 回出る場合の余事象の確率である。

5 または 6 の目が 0 回出る確率は　${}_5C_0\left(\dfrac{1}{3}\right)^0\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^{5-0}=1\cdot1\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^5=\dfrac{32}{243}$

5 または 6 の目が 1 回出る確率は，(1)より　$\dfrac{80}{243}$

したがって，求める確率は　$1-\left(\dfrac{32}{243}+\dfrac{80}{243}\right)=\boldsymbol{\dfrac{131}{243}}$

9　条件付き確率

次の問いに答えよ。

(1)　海外旅行に関するアンケートを実施したところ，海外に行ったことのある人は全体の 70 % で，ハワイに行ったことのある人は全体の 28 % であった。
海外に行ったことのある人の中から 1 人選んだとき，その人がハワイに行ったことのある確率を求めよ。

(2)　1 から 10 までの番号が書かれた 10 枚のカードの中から 1 枚引き，それをもとに戻さないでもう 1 枚引くとき，2 枚目が 3 の倍数である確率を求めよ。

要　点

条件付き確率

事象 A が起こったときに事象 B が起こる確率 $P_A(B)$は　$\boldsymbol{P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}}$

確率の乗法定理　　$\boldsymbol{P(A\cap B)=P(A)P_A(B)}$

解答

(1)　アンケートに答えた人から 1 人選んだとき，

その人が海外に行ったことがあると答える事象を A，
その人がハワイに行ったことがあると答える事象を B

とすると　$P(A)=\dfrac{70}{100}$，$P(A\cap B)=\dfrac{28}{100}$

よって，求める確率は　$P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{28}{100}\div\dfrac{70}{100}=\boldsymbol{\dfrac{2}{5}}$

(2)　1 枚目が 3 の倍数である事象を A,
2 枚目が 3 の倍数である事象を B
とする。2 枚目が 3 の倍数になる場合は，次の 2 通りある。

(ⅰ)　1 枚目が 3 の倍数であり，2 枚目も 3 の倍数である場合

$$P(A\cap B)=P(A)P_A(B)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{6}{90}$$

(ⅱ)　1 枚目が 3 の倍数ではなく，2 枚目が 3 の倍数である場合

$$P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)=\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{21}{90}$$

(ⅰ)と(ⅱ)は互いに排反であるから，求める確率は

$$P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)=\frac{6}{90}+\frac{21}{90}=\frac{27}{90}=\boldsymbol{\frac{3}{10}}$$

１０　**期待値**

A さん，B さんの 2 人がじゃんけんをして，グーで勝つと 3 点，チョキで勝つと 6 点，パーで勝つと 6 点，あいこなら 1 点がもらえ，負ければ得点がもらえない，すなわち 0 点であるゲームをする。
A さんが 1 回のじゃんけんでもらえる得点の期待値を求めよ。ただし，A さん，B さんともにじゃんけんの手の出し方に偏りはないものとする。

要　点

期待値

一般に，x が x_1，x_2，x_3，……，x_n のいずれかの値をとり，これらの値をとる確率がそれぞれ p_1，p_2，p_3，……，p_n
（ただし　$p_1+p_2+p_3+\cdots\cdots+p_n=1$）
であるとき

$$\boldsymbol{x_1 p_1+x_2 p_2+x_3 p_3+\cdots\cdots+x_n p_n}$$

の値を，x の **期待値** という。

x の値	x_1	x_2	x_3	……	x_n	計
確率	p_1	p_2	p_3	……	p_n	1

例えば，右の表のような賞金がついている 50 本のくじがある。
このくじ 1 本の賞金の期待値を求めてみよう。
賞金は 10000（円），1000（円），100（円），0（円）であり，
これらを引く確率はそれぞれ　$\frac{1}{50}$，$\frac{3}{50}$，$\frac{10}{50}$，$\frac{36}{50}$

$\left(\text{これは}\quad\frac{1}{50}+\frac{3}{50}+\frac{10}{50}+\frac{36}{50}=1\quad\text{を満たす。}\right)$

であるから，期待値は

$$10000\times\frac{1}{50}+1000\times\frac{3}{50}+100\times\frac{10}{50}+0\times\frac{36}{50}=280\text{（円）}$$

	賞金	本数
1 等	10000 円	1 本
2 等	1000 円	3 本
3 等	100 円	10 本
はずれ	0 円	36 本

コメント

結果が偶然に左右される場合でも，それを行うかどうか判断するときがある。そのようなとき，期待値を判断の基準として利用することが考えられる。
例えば，前頁のくじが 1 回 300 円で引けるとすると，1 等や 2 等を引けば得をするが，3 等やはずれを引けば損をする。このとき，期待値が 280 円であることから，引かないと判断することも考えられる。

解答

A　B
グ ― グ　1 点
グ ― チ　3 点
グ ― パ　0 点

A　B
チ ― グ　0 点
チ ― チ　1 点
チ ― パ　6 点

A　B
パ ― グ　6 点
パ ― チ　0 点
パ ― パ　1 点

得点 x と，それらの値をとる確率は右の表のようになる。
よって，求める期待値は

得点 x	0	1	3	6	計
確率	$\frac{3}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	1

$$0\times\frac{3}{9}+1\times\frac{3}{9}+3\times\frac{1}{9}+6\times\frac{2}{9}=\frac{3+3+12}{9}=\mathbf{2}\text{（点）}$$

研究　**原因の確率**

同じ製品を製造している 2 つの工場 A，B があり，A 工場の製品には 1 %，B 工場の製品には 2 % の不良品が含まれている。A 工場の製品と B 工場の製品を 7 : 3 の割合で混ぜた大量の製品の中から 1 個取り出すとき，次の確率を求めよ。

(1)　不良品である確率

(2)　不良品であったとき，それが A 工場の製品である確率

解答

(1)　取り出した 1 個が，A 工場の製品である事象を A,
B 工場の製品である事象を B,
不良品である事象を E

とする。　$P(A)=\dfrac{7}{10}$，$P(B)=\dfrac{3}{10}$，$P_A(E)=\dfrac{1}{100}$，$P_B(E)=\dfrac{2}{100}$

よって　$P(E)=P(A\cap E)+P(B\cap E)=P(A)P_A(E)+P(B)P_B(E)$

$$=\frac{7}{10}\times\frac{1}{100}+\frac{3}{10}\times\frac{2}{100}=\frac{7+6}{1000}=\mathbf{\frac{13}{1000}}$$

(2)　求める確率は $P_E(A)$であるから

$$P_E(A)=\frac{P(E\cap A)}{P(E)}=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{7}{1000}\div\frac{13}{1000}=\mathbf{\frac{7}{13}}$$

参考　**モンティ・ホール問題**

プレーヤーの前に閉まった 3 つのドアがあって，1 つのドアの後ろには景品の新車が，2 つのドアの後ろには，はずれを意味するヤギがいる。プレーヤーは新車のドアを当てると新車がもらえる。プレーヤーが 1 つのドアを選択した後，司会のモンティが残りのドアのうちヤギがいるドアを開けてヤギを見せる。ここでプレーヤーは，最初に選んだドアを，残っている開けられていないドアに変更してもよいと言われる。プレーヤーはドアを変更すべきだろうか？

解答

最初にプレーヤーがあたりを引く確率は $\dfrac{1}{3}$ である。

ドアを変更しない場合はそのまま $\dfrac{1}{3}$ の確率である（変更しないのであればモンティがドアを開こうが開くまいが確率は変わらない)。

モンティがドアを開けた後にドアを変更する場合，最初に選択したドアがはずれであれば変更後のドアはあたりが確定である。つまり，

（最初に選択したドアがはずれである確率）＝（ドアを変更した場合にあたりを引く確率）

である。

最初の選択であたりを引く確率は $\dfrac{1}{3}$ ，はずれを引く確率は $\dfrac{2}{3}$ である。

したがって，ドアを変更した場合のあたりを引く確率は $\dfrac{2}{3}$ と考えられるため，変更すべきである。