複素数と方程式

1　複素数の計算

次の計算をせよ。ただし，i は虚数単位とする。

〈注意〉以後，特に断りがない限り，i は虚数単位を表すものとする。

(1)　$\dfrac{2+5i}{3-2i}$　　　　(2)　$\sqrt{-5}\times\sqrt{-20}$

要　点

i を普通の文字のように扱う。i^2 が出てきたら，$i^2=-1$ とする。

(1)　**複素数**は，実数 a，b を用いて $\boldsymbol{a+bi}$ の形で表される数である。$a+bi$，$a-bi$ を，互いに共役な複素数という。分母と共役な複素数を分母，分子に掛けて，分母を実数化する。

(2)　$a>0$ のとき，$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$ として計算する。

解答

(1)　$\dfrac{2+5i}{3-2i}=\dfrac{(2+5i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\dfrac{6+4i+15i+10i^2}{9-4i^2}=\dfrac{6+19i-10}{9+4}=\boldsymbol{-\dfrac{4}{13}+\dfrac{19}{13}i}$

(2)　$\sqrt{-5}\times\sqrt{-20}=\sqrt{5}i\times\sqrt{20}i=\sqrt{100}i^2=\boldsymbol{-10}$

2　複素数の相等

等式$(4+3i)x+(1+2i)y+5=0$ を満たす実数 x，y を求めよ。

要　点

a，b，c，d が実数のとき　$a+bi=c+di$　$\Leftrightarrow$　$a=c$ かつ $b=d$

特に　$a+bi=0$　$\Leftrightarrow$　$a=b=0$

解答

与えられた等式の左辺を i について整理すると　$4x+y+5+(3x+2y)i=0$

x，y が実数であるから，$4x+y+5$，$3x+2y$ も実数である。

よって　$\begin{cases}4x+y+5=0\\3x+2y=0\end{cases}$　を満たす x，y を求めればよい。

連立方程式を解くと　$\boldsymbol{x=-2,\ y=3}$

3　2 次方程式の解と判別式

(1)　次の 2 次方程式を解け。

①　$x^2=-2$　　②　$2x(3-x)=2x+3$

(2)　次の 2 次方程式の解の種類を判別せよ。

①　$2x^2-5x+4=0$　　②　$3x^2-8x-2=0$

(3)　2 次方程式 $2x^2-2kx+k^2-3k+4=0$ が重解をもつような定数 k の値と，そのときの重解をすべて求めよ。

要　点

負の数の平方根

$k>0$ とする。負の数 $-k$ の平方根は　$\pm\sqrt{-k}$　すなわち　$\pm\sqrt{k}\,i$

2 次方程式の解の公式

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は　$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

2 次方程式の解の種類の判別

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を $D=b^2-4ac$ とする。

$$\left.\begin{array}{ll}\text{異なる2つの実数解をもつ} & \Leftrightarrow\ D>0 \\ \text{重解をもつ} & \Leftrightarrow\ D=0\end{array}\right\}\ \text{実数解をもつ}\ \Leftrightarrow\ D\geqq 0$$

異なる2つの虚数解をもつ　$\Leftrightarrow$　$D<0$

解答

(1)　①　$\boldsymbol{x}=\pm\sqrt{-2}=\boldsymbol{\pm\sqrt{2}\,i}$

②　与えられた方程式を整理すると $2x^2-4x+3=0$ となるので，解の公式より

$$\boldsymbol{x}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot2\cdot3}}{2\cdot2}=\frac{4\pm\sqrt{16-24}}{4}=\frac{4\pm2\sqrt{2}i}{4}=\boldsymbol{\frac{2\pm\sqrt{2}i}{2}}$$

(2)　①　$D=(-5)^2-4\cdot2\cdot4=25-32=-7$ より，$D<0$ であるから　**異なる 2 つの虚数解をもつ。**

②　$D=(-8)^2-4\cdot3\cdot(-2)=64+24=88$ より，$D>0$ であるから　**異なる 2 つの実数解をもつ。**

(3)　$D=(-2k)^2-4\cdot2\cdot(k^2-3k+4)=4k^2-8k^2+24k-32$

$=-4k^2+24k-32=-4(k^2-6k+8)=-4(k-2)(k-4)$

題意より，$D=0$ となるときの k の値を求める。　$-4(k-2)(k-4)=0$　$\Rightarrow$　$k=2$，4

$k=2$ のとき　$2x^2-2\cdot2\cdot x+2^2-3\cdot2+4=2x^2-4x+2=0$　$\Rightarrow$　$2(x-1)^2=0$　$\Rightarrow$　$x=1$

$k=4$ のとき　$2x^2-2\cdot4\cdot x+4^2-3\cdot4+4=2x^2-8x+8=0$　$\Rightarrow$　$2(x-2)^2=0$　$\Rightarrow$　$x=2$

以上より　**$k=2$ のとき $x=1$，$k=4$ のとき $x=2$**

4　**2 次方程式の解と係数の関係**

2 次方程式 $2x^2+6x-3=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の値を求めよ。

(1)　$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$　　(2)　$\alpha^2+\beta^2$　　(3)　$\alpha^3+\beta^3$

要　点

2 次方程式の解と係数の関係

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α，β とすると　$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

解答

2 次方程式の解と係数の関係により　$\alpha+\beta=-\dfrac{6}{2}=-3$，$\alpha\beta=\dfrac{-3}{2}=-\dfrac{3}{2}$

(1)　$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=-\dfrac{3}{2}\cdot(-3)=\boldsymbol{\dfrac{9}{2}}$

(2)　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-3)^2-2\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)=9+3=\mathbf{12}$

(3)　$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=(-3)^3-3\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)\cdot(-3)=-27-\dfrac{27}{2}=\boldsymbol{-\dfrac{81}{2}}$

別解　$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=(\alpha+\beta)\{(\alpha^2+\beta^2)-\alpha\beta\}$

$=-3\cdot\left\{12-\left(-\dfrac{3}{2}\right)\right\}=-3\cdot\dfrac{27}{2}=-\dfrac{81}{2}$

5　**2 次方程式の作成**

(1)　2 つの数 $3+\sqrt{2}$，$3-\sqrt{2}$ を解にもつ 2 次方程式を 1 つ作れ。

(2)　2 次方程式 $x^2+3x-6=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，$2\alpha+\beta$，$\alpha+2\beta$ を解にもつ 2 次方程式を 1 つ作れ。

(3)　和が 2，積が 7 である 2 つの数を求めよ。

要　点

2 つの数 α，β を解にもつ 2 次方程式は　$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

〈注意〉任意の 2 次方程式を求める場合，x^2 の係数が 1 のものを考えればよい。

解答

(1)　$\alpha=3+\sqrt{2}$，$\beta=3-\sqrt{2}$ とする。

$\alpha+\beta=(3+\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})=6$

$\alpha\beta=(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})=9-2=7$

よって　$\boldsymbol{x^2-6x+7=0}$

2 次方程式 $x^2+bx+c=0$ の解が α，β であるとき
$\alpha+\beta=-b$，$\alpha\beta=c$

(2)　2 次方程式の解と係数の関係により　$\alpha+\beta=-3$，$\alpha\beta=-6$

これにより　$(2\alpha+\beta)+(\alpha+2\beta)=3\alpha+3\beta=3(\alpha+\beta)=3\cdot(-3)=-9$

$$(2\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)=2\alpha^2+4\alpha\beta+\alpha\beta+2\beta^2=2(\alpha^2+\beta^2)+5\alpha\beta$$
$$=2\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+5\alpha\beta=2(\alpha+\beta)^2+\alpha\beta$$
$$=2\cdot(-3)^2+(-6)=18-6=12$$

よって　$\boldsymbol{x^2+9x+12=0}$

(3)　2 つの数をα，βとおくと　$\alpha+\beta=2$，$\alpha\beta=7$

よって，α，βを解にもつ 2 次方程式は　$x^2-2x+7=0$

解の公式により　$x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot7}}{2}=\dfrac{2\pm\sqrt{4-28}}{2}=\dfrac{2\pm2\sqrt{6}i}{2}=1\pm\sqrt{6}i$

したがって，2 つの数は　$\boldsymbol{1+\sqrt{6}i}$，$\boldsymbol{1-\sqrt{6}i}$

6　2 次方程式の実数解の符号

2 次方程式 $x^2+mx+m+8=0$ が，次の条件を満たすように実数 m の値の範囲を定めよ。

(1)　異なる 2 つの正の解をもつ。

(2)　異なる 2 つの負の解をもつ。

(3)　正と負の解をもつ。

要　点

2 つの実数α，βについて，次のことが成り立つ。

$\alpha>0$ かつ $\beta>0$　$\Leftrightarrow$　$\alpha+\beta>0$ かつ $\alpha\beta>0$

$\alpha<0$ かつ $\beta<0$　$\Leftrightarrow$　$\alpha+\beta<0$ かつ $\alpha\beta>0$

αとβが異符号　$\Leftrightarrow$　$\alpha\beta<0$

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D，2 つの解をα，βとすると，次のことがいえる。

Ⅰ　異なる 2 つの正の解をもつ　$\Leftrightarrow$　$D>0$，$\alpha+\beta>0$，$\alpha\beta>0$

〈注意〉正や負は実数のときに考えることなので，2 次方程式は実数解をもたなければいけない。

Ⅱ　異なる 2 つの負の解をもつ　$\Leftrightarrow$　$D>0$，$\alpha+\beta<0$，$\alpha\beta>0$

Ⅲ　正と負の解をもつ　$\Leftrightarrow$　$\alpha\beta<0$

コメント：2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ に関して，$D=b^2-4ac=a^2\left(\dfrac{b^2-4ac}{a^2}\right)=a^2\left\{\left(\dfrac{b}{a}\right)^2-4\left(\dfrac{c}{a}\right)\right\}$，

$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$ より，$\alpha\beta<0$ のとき $D>0$ となる。これにより，Ⅲの条件は$\alpha\beta<0$ のみ満たせばよい。

解答

2 次方程式 $x^2+mx+m+8=0$ の判別式を D，2 つの解を α，β とすると

$$D=m^2-4\cdot1\cdot(m+8)=m^2-4m-32=(m+4)(m-8),\quad \alpha+\beta=-m,\quad \alpha\beta=m+8$$

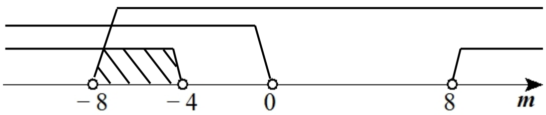
(1)　$D>0$，$\alpha+\beta>0$，$\alpha\beta>0$　を満たせばよい。

(i)　$D>0$　すなわち　$(m+4)(m-8)>0$　よって　$m<-4$，$8<m$

(ii)　$\alpha+\beta>0$　すなわち　$-m>0$　よって　$m<0$

(iii)　$\alpha\beta>0$　すなわち　$m+8>0$　よって　$m>-8$

以上のことから，右の数直線より　$\boldsymbol{-8<m<-4}$



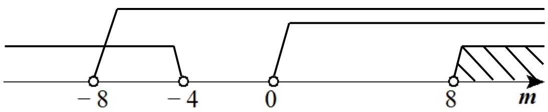
(2)　$D>0$，$\alpha+\beta<0$，$\alpha\beta>0$　を満たせばよい。

(i)　$D>0$　　(1)より　$m<-4$，$8<m$

(ii)　$\alpha+\beta<0$　すなわち　$-m<0$　よって　$m>0$

(iii)　$\alpha\beta>0$　　(1)より　$m>-8$

以上のことから，右の数直線より　$\boldsymbol{m>8}$



(3)　$\alpha\beta<0$　を満たせばよい。

$m+8<0$ より　$\boldsymbol{m<-8}$

$\boxed{7}$　**剰余の定理**

(1)　多項式 $2x^3+8x^2+5x-2$ を $x+3$ で割ったときの余りを求めよ。

(2)　多項式 $P(x)$を，$2x+1$，$2x-1$ で割ったときの余りがそれぞれ 5，1 のとき，$P(x)$を $4x^2-1$ で割ったときの余りを求めよ。

要　点

剰余の定理

・多項式 $P(x)$を 1 次式 $x-\alpha$ で割った余りは $P(\alpha)$

・多項式 $P(x)$を 1 次式 $ax+b$ で割った余りは $P\left(-\dfrac{b}{a}\right)$

多項式の除法

A，B を同じ文字についての多項式とする。ただし，$B\neq0$ とする。

A を B で割ったとき，商が Q，余りが R になったとする。このとき，$A=BQ+R$ が成り立つ。

余り R の次数は割る式 B の次数より小さくなる。

解答

(1)　$P(x)=2x^3+8x^2+5x-2$ とおく。

剰余の定理により，求める余りは　$P(-3)=2\cdot(-3)^3+8\cdot(-3)^2+5\cdot(-3)-2$

$$=-54+72-15-2=\boldsymbol{1}$$

(2)　2 次式 $4x^2-1$ で割ったときの余りは 1 次式または定数となるので $ax+b$ とおける。

$4x^2-1=(2x+1)(2x-1)$ より，$P(x)$ を 2 次式 $(2x+1)(2x-1)$ で割ったときの商を Q とすると

$$P(x)=(2x+1)(2x-1)Q+ax+b$$

と表すことができる。

剰余の定理により　$P\left(-\dfrac{1}{2}\right)=5$，$P\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$ であるから

$$-\frac{1}{2}a+b=5,\quad \frac{1}{2}a+b=1$$

これらを連立させて解くと　$a=-4$，$b=3$　　よって，求める余りは　$\boldsymbol{-4x+3}$

[8] **高次方程式**

次の方程式を解け。

(1)　$x^3=-1$　　　(2)　$x^3-4x^2+2x+1=0$

要　点

因数定理

・1 次式 $x-\alpha$ が多項式 $P(x)$ の因数である　$\Leftrightarrow$　$P(\alpha)=0$

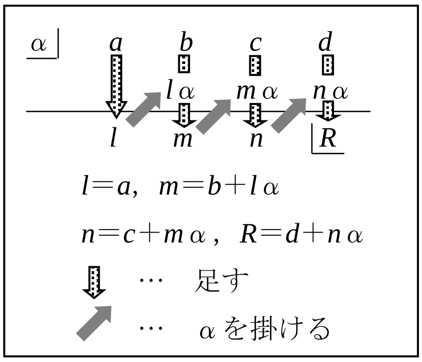
・1 次式 $ax+b$ が多項式 $P(x)$ の因数である　$\Leftrightarrow$　$P\left(-\dfrac{b}{a}\right)=0$

与えられた方程式を $P(x)=0$ の形に変形し，$P(\alpha)=0$ を満たす α を見つけ出す。このとき，因数定理により多項式 $P(x)$ は $x-\alpha$ を因数にもつので，$P(x)=(x-\alpha)\cdot Q(x)$ と表すことができる。これを繰り返し $P(x)$ を 1 次式または 2 次式の積で表せば，高次方程式 $P(x)=0$ の解を求めることができる。

組立除法

多項式 $P(x)$ を 1 次式 $x-\alpha$ で割ったときの商と余りを求める簡単な方法に，組立除法と呼ばれるものがある。

たとえば，多項式 $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ を $x-\alpha$ で割ったときの商を lx^2+mx+n，余りを R とすると，右のようにして l，m，n，R を求めることができる。



解答

(1)　与えられた方程式を整理すると　$x^3+1=0$ となる。左辺を因数分解すると

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)\quad より\quad x+1=0\quad または\quad x^2-x+1=0$$

解の公式により　$x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot1}}{2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

したがって　$\boldsymbol{x=-1,\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}}$

(2)　$P(x)=x^3-4x^2+2x+1$ とおくと　$1^3-4\cdot 1^2+2\cdot 1+1=1-4+2+1=0$ より　$P(1)=0$

右の組立除法により

$$P(x)=(x-1)(x^2-3x-1)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -4 & 2 & 1 \\ & & 1 & -3 & -1 \\ \hline & 1 & -3 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=0$ から　$x-1=0$　または　$x^2-3x-1=0$

解の公式により

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{9+4}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$$

したがって　$\boldsymbol{x=1,\ \dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}}$

$\boxed{9}$　**解からの係数決定**

(1)　方程式 $x^3-ax^2+2=0$ の 1 つの解が $x=1$ であるとき，実数 a の値を求めよ。また，そのときの他の解を求めよ。

(2)　方程式 $x^3+ax^2+bx+10=0$ の 1 つの解が $x=3-i$ であるとき，実数 a，b の値を求めよ。また，そのときの他の解を求めよ。

要　点

虚数解をもつ高次方程式

実数係数の高次方程式が虚数解 $x=s+ti$（s，t は実数）をもつとき，共役な複素数 $s-ti$ もこの高次方程式の解となることが知られている。

$$x=s\pm ti \ \Rightarrow\ x-s=\pm ti \ \xrightarrow[\text{両辺 2 乗する}]{}\ (x-s)^2=(\pm ti)^2$$

$$\Rightarrow\ x^2-2sx+s^2=-t^2 \ \Rightarrow\ x^2-2sx+s^2+t^2=0$$

実数係数の高次方程式 $P(x)=0$ が虚数解 $x=s+ti$ をもつとき，$P(x)$は $x^2-2sx+s^2+t^2$ で割り切れる。

3 次方程式の解と係数の関係

3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の 3 つの解を α，β，γ とすると

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

解答

(1)　与えられた方程式に $x=1$ を代入すると

$$1^3-a\cdot 1^2+2=1-a+2=0 \qquad \text{よって}\quad a=3$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ & & 1 & -2 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

方程式 $x^3-3x^2+2=0$ は $x=1$ を解にもつから

右の組立除法により　$(x-1)(x^2-2x-2)=0$

解の公式により　$x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2}=\dfrac{2\pm\sqrt{4+8}}{2}=\dfrac{2\pm 2\sqrt{3}}{2}=1\pm\sqrt{3}$

したがって　**$a=3$，他の解は $x=1\pm\sqrt{3}$**

(2)　この方程式は $x=3+i$ も解にもつ。

$$x=3\pm i \quad \Rightarrow \quad x-3=\pm i \quad \xrightarrow[\text{両辺 2 乗する}]{} \quad (x-3)^2=(\pm i)^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2-6x+9=-1 \quad \Rightarrow \quad x^2-6x+10=0$$

これより，$x^3+ax^2+bx+10$ は $x^2-6x+10$ で割り切れる。

右の計算により商と余りが求まる。

$$\begin{array}{r}
x+(a+6) \qquad\qquad\qquad \\
x^2-6x+10 \,\big)\, \overline{x^3+ax^2+bx+10} \\
\underline{x^3-6x^2+10x \qquad\quad} \\
(a+6)x^2+(b-10)x+10 \\
\underline{(a+6)x^2-6(a+6)x+10(a+6)} \\
\{(b-10)+6(a+6)\}x+10-10(a+6)
\end{array}$$

割り切れるので余りは 0 であるから

$$\{(b-10)+6(a+6)\}x+10-10(a+6)=0$$

$$\begin{cases} b+6a+26=0 \\ -10a-50=0 \end{cases}$$

これを解くと　$a=-5$，$b=4$

よって　$x^3-5x^2+4x+10=(x^2-6x+10)\{x+(-5+6)\}$

$=(x^2-6x+10)(x+1)=0$

したがって　**$a=-5$，$b=4$，他の解は $x=3+i$，-1**

$\boxed{\text{別解 1}}$　$x=3-i$ を方程式 $x^3+ax^2+bx+10=0$ に代入する。

$$(3-i)^3+a(3-i)^2+b(3-i)+10=3^3-3\cdot 3^2\cdot i+3\cdot 3\cdot i^2-i^3+a(9-6i+i^2)+3b-bi+10$$

$$=27-27i-9+i+9a-6ai-a+3b-bi+10=8a+3b+28+(-6a-b-26)i=0$$

$$\begin{cases} 8a+3b+28=0 \\ -6a-b-26=0 \end{cases}$$

これを解くと　$a=-5$，$b=4$

方程式 $x^3-5x^2+4x+10=0$ を解くと　$x=-1$，$3\pm i$

したがって　$a=-5$，$b=4$，他の解は $x=-1$，$3+i$

$\boxed{\text{別解 2}}$　この方程式は $x=3+i$ も解にもつ。$\alpha=3-i$，$\beta=3+i$，$x=3\pm i$ 以外の解を γ とおき，3 次方程式の解と係数の関係を用いる。

$$\begin{cases} (3-i)+(3+i)+\gamma=-a & \cdots① \\ (3-i)(3+i)+(3+i)\gamma+\gamma(3-i)=b & \cdots② \\ (3-i)(3+i)\gamma=-10 & \cdots③ \end{cases}$$

③より　$10\gamma=-10$　よって　$\gamma=-1$

①より　$6-1=-a$　よって　$a=-5$

②より　$10-(3-i)-(3+i)=b$　よって　$b=4$

以上より　$a=-5$，$b=4$，他の解は $x=3+i$，-1