複素数平面

以下，i は虚数単位を表すものとする。

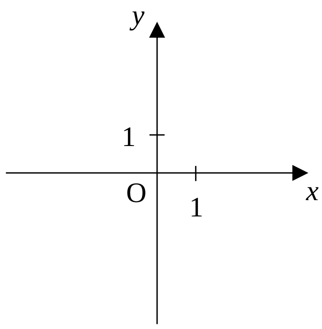
1 **複素数平面**

次の複素数を表す点を複素数平面上に図示せよ。

(1) $2+3i$　　(2) $-1+2i$　　(3) $-3-i$

(4) $2-2i$　　(5) -2　　(6) i

(7) 0

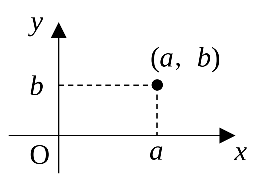


要　点

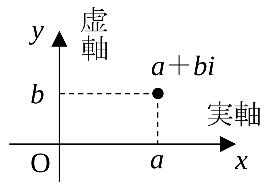
複素数平面

a，b を実数とする。複素数 $a+bi$ は，実部 a と虚部 b の組で定まるから，$a+bi$ に座標平面上の点 P$(a,\ b)$を対応させると，すべての複素数がこの平面上の点で表される。各点が複素数を表すと定められた座標平面を **複素数平面** といい，x 軸を **実軸** ，y 軸を **虚軸** という。

複素数 $z=a+bi$ を表す点 P を， **P(z)** または **P($a+bi$)** で表す。単に **点 z** または **点 $a+bi$** と表すこともある。

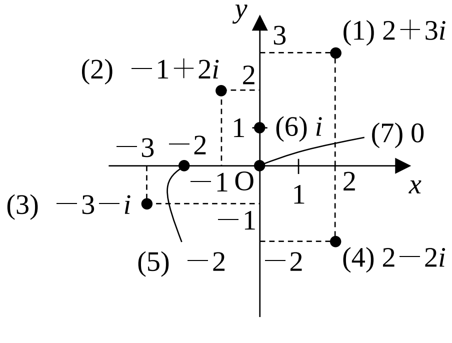


座標平面



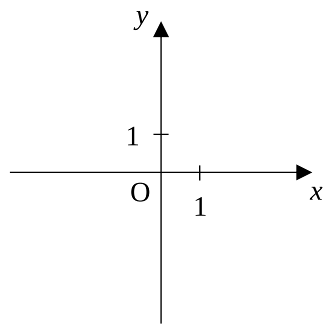
複素数平面

解答



$\boxed{2}$　**共役な複素数**

(1)　$z=1+2i$のとき，4 点z，$\bar{z}$，$-z$，$-\bar{z}$
を複素数平面上にそれぞれ図示せよ。



(2)　複素数α，βについて，次の問いに答えよ。

①　$\alpha-\beta=-2$ のとき，$\bar{\alpha}-\bar{\beta}$を求めよ。

②　$\alpha\beta=3i$のとき，$\bar{\alpha}\,\bar{\beta}$を求めよ。

要　点

a，b を実数とする。

複素数$z=a+bi$に対して，$\bar{z}=a-bi$をzの **共役な複素数** という。

共役な複素数の性質

複素数 $z=a+bi$ に対して

・$\boldsymbol{z}$**が実数のとき，**$\boldsymbol{b=0}$**であるから**　$\boldsymbol{\bar{z}=z}$

　$\boldsymbol{z}$**が純虚数のとき，**$\boldsymbol{a=0}$**，**$\boldsymbol{b\neq 0}$**であるから**　$\boldsymbol{\bar{z}=-z}$ **かつ** $\boldsymbol{z\neq 0}$

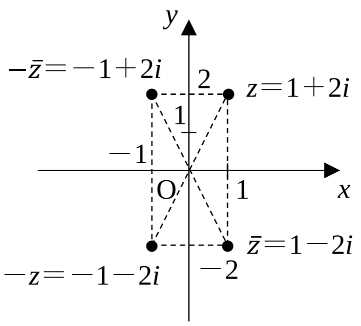
・z，w は複素数とする。

$\boxed{1}$　$\boldsymbol{\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}}$　　$\boxed{2}$　$\boldsymbol{\overline{z-w}=\bar{z}-\bar{w}}$　　$\boxed{3}$　$\boldsymbol{\overline{zw}=\bar{z}\,\bar{w}}$

$\boxed{4}$　$\boldsymbol{\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{w}}}$　$(\boldsymbol{w\neq 0})$　　$\boxed{5}$　$\boldsymbol{\overline{(\bar{z})}=z}$

解答

(1)



(2)　①　$\alpha-\beta$は実数であるから　$\overline{\alpha-\beta}=\alpha-\beta=-2$

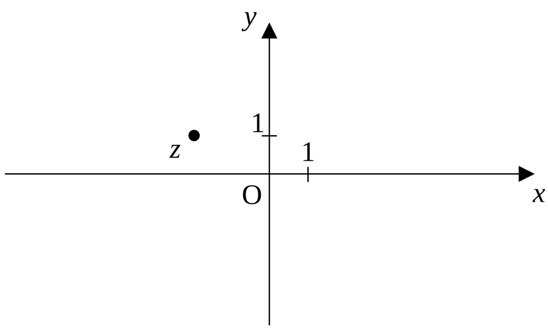
よって　$\bar{\alpha}-\bar{\beta}=\overline{\alpha-\beta}=\boldsymbol{-2}$

②　$\alpha\beta$は純虚数であるから　$\overline{\alpha\beta}=-\alpha\beta=-3i$

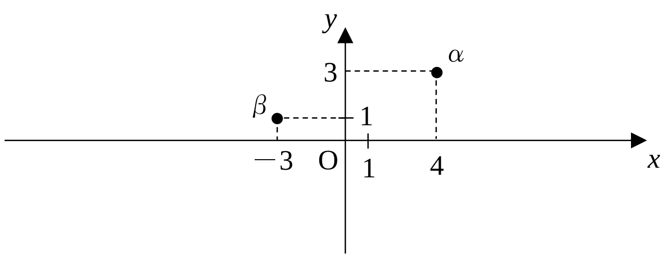
よって　$\bar{\alpha}\,\bar{\beta}=\overline{\alpha\beta}=\boldsymbol{-3i}$

3　**複素数の実数倍，加法，減法**

(1)　$z=-2+i$ のとき，点 $2z$，$3z$，$-z$，$-2z$，$-3z$ を複素数平面上にそれぞれ図示せよ。



(2)　$\alpha=4+3i$，$\beta=-3+i$ のとき，点 $\alpha+\beta$，$\alpha-\beta$，$-\alpha+3\beta$ を複素数平面上にそれぞれ図示せよ。



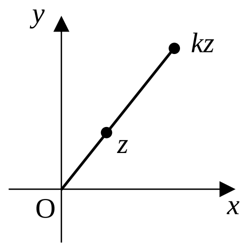
要　点

複素数の実数倍

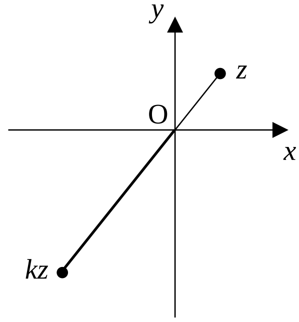
0 でない複素数 z と実数 k について，次のことが成り立つ。

・3 点 O(0)，z，kz は一直線上にある。

・<u>$k>0$ のとき</u>，点 kz は原点に関して点 z と同じ側にあり，原点からの距離は 0，z 間の距離の k 倍である。



・<u>$k<0$ のとき</u>，点 kz は原点に関して点 z と反対側にあり，原点からの距離は 0，z 間の距離の $|k|$ 倍である。

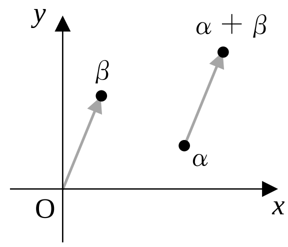


・<u>$k=0$ のとき</u>　$kz=0$

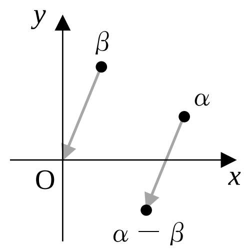
複素数の加法，減法

複素数α，βについて，次のことが成り立つ。

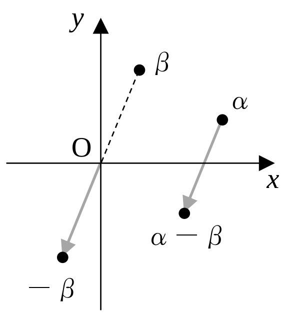
・点$\alpha+\beta$は，原点Oを点βに移す平行移動によって点αを移した点である。



・点$\alpha-\beta$は，点βを原点Oに移す平行移動によって点αを移した点である。

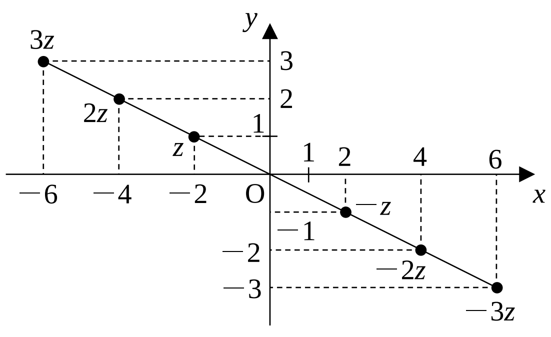


〈注意〉$-\beta=+(-\beta)$より，点βを原点Oに移す平行移動は，原点Oを点$-\beta$に移す平行移動と同じである。

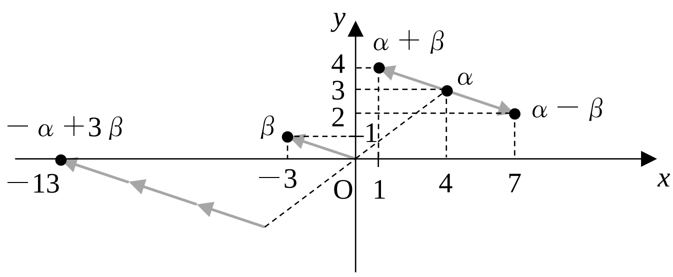


解答

(1)



(2)



4　複素数の絶対値

次の複素数の絶対値を求めよ。

(1)　$1+2i$　　(2)　$-3+4i$　　(3)　2　　(4)　$-i$

要　点

複素数の絶対値

a，bを実数とする。複素数$z=a+bi$に対し，$\boldsymbol{\sqrt{a^2+b^2}}$ をzの **絶対値** といい，$\boldsymbol{|z|}$ で表す。

すなわち　$\boldsymbol{|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}}$

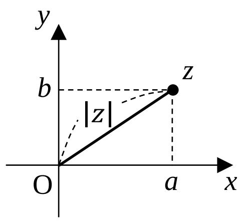
$|z|$は，原点 O から点 z までの距離である。

$|z|\geqq 0$ であり，$|z|=0$ となるのは $z=0$ のときに限る。

〈注意〉$z=a+bi$のとき，$\bar{z}=a-bi$であり，

$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2$より

$\boldsymbol{|z|^2=z\bar{z}}$ が成り立つ。



解答

(1)　$|1+2i|=\sqrt{1^2+2^2}=\boldsymbol{\sqrt{5}}$

(2)　$|-3+4i|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=\boldsymbol{5}$

(3)　$|2|=\sqrt{2^2+0^2}=\boldsymbol{2}$

(4)　$|-i|=\sqrt{0^2+(-1)^2}=\boldsymbol{1}$

5　複素数の極形式

次の複素数を極形式で表せ。ただし，偏角 θ は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(1)　$1+\sqrt{3}i$　　(2)　$-2-2i$　　(3)　-1　　(4)　$3i$

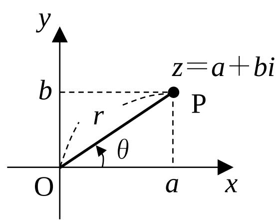
要　点

a，b を実数とする。0 でない複素数 $z=a+bi$ を表す点を P とする。

半直線 OP を動径と考えて，動径 OP の表す角 θ を z の **偏角** といい，

arg *z* で表す。

〈注意〉記号 arg は argument の略である。



OP＝r とすると，r は z の絶対値であり，$a=r\cos\theta$，$b=r\sin\theta$ となり，

$z=a+bi$ は　$\boldsymbol{z=r(\cos\theta+i\sin\theta)}$　の形で表される。これを，複素数 z の **極形式** という。

以上をまとめると，0 でない複素数 $z=a+bi$ において

rはzの絶対値であるから　$r=\sqrt{a^2+b^2}$

θはzの偏角であるから　$\cos\theta=\dfrac{a}{r}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{r}$を満たす角であり，

その極形式は　$\boldsymbol{z=r(\cos\theta+i\sin\theta)}$　と表される。

〈注意〉・0 でない複素数 z において，z の絶対値は 1 通りに定まるが，偏角 θ はその 1 つを θ_0 としたとき $\theta=\theta_0+2n\pi$ (n は整数)も同じ位置にくるから 1 つに定まらない。$0\leqq\theta<2\pi$ や $-\pi\leqq\theta<\pi$ の範囲で偏角を考えるのが一般的である。

・$z=0$ のときは偏角が定められないため，極形式は考えない。

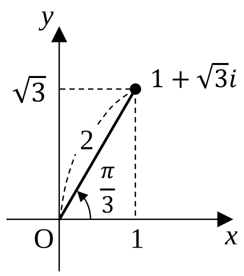
解答

(1)　$1+\sqrt{3}i$の絶対値は

$$\left|1+\sqrt{3}i\right|=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2$$

偏角 θ は

$$\cos\theta=\frac{1}{2},\ \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ より}\quad \theta=\frac{\pi}{3}$$



よって　$1+\sqrt{3}i=\mathbf{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$

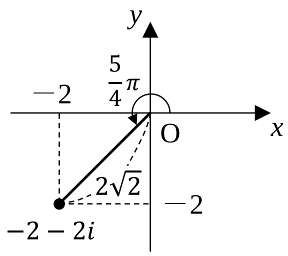
(2)　$-2-2i$ の絶対値は

$$|-2-2i|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$$

偏角 θ は

$$\cos\theta=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\theta=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\text{ より}$$

$$\theta=\frac{5}{4}\pi$$



よって　$-2-2i=\mathbf{2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)}$

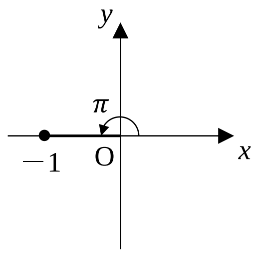
(3)　-1 の絶対値は

$$|-1|=\sqrt{(-1)^2+0^2}=1$$

偏角 θ は

$$\cos\theta=\frac{-1}{1}=-1,\ \sin\theta=\frac{0}{1}=0\text{ より}$$

$$\theta=\pi$$



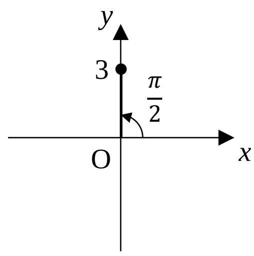
よって　$-1=\mathbf{\cos\pi+i\sin\pi}$

(4)　$3i$ の絶対値は

$$|3i|=\sqrt{0^2+3^2}=3$$

偏角 θ は

$$\cos\theta=\frac{0}{3}=0,\ \sin\theta=\frac{3}{3}=1\text{ より}\quad \theta=\frac{\pi}{2}$$



よって　$3i=\mathbf{3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)}$

6　複素数の乗法・除法

$\alpha=\sqrt{3}-i$，$\beta=-2+2i$のとき，$\alpha\beta$，$\dfrac{\alpha}{\beta}$をそれぞれ極形式で表せ。

ただし，偏角θは $0\leqq\theta<2\pi$とする。

要　点

0 でない 2 つの複素数を

$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

とするとき，積z_1z_2，商$\dfrac{z_1}{z_2}$は次のようになる。

・$z_1z_2=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

$=r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2+i\sin\theta_2\cos\theta_1+i\sin\theta_1\cos\theta_2+i^2\sin\theta_1\sin\theta_2)$

$=r_1r_2\{(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)\}$

三角関数の加法定理　$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

を適用すると

$z_1z_2=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$

・$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\dfrac{r_1}{r_2}\cdot\dfrac{(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}$

$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2-i\sin\theta_2\cos\theta_1+i\sin\theta_1\cos\theta_2-i^2\sin\theta_1\sin\theta_2}{\cos^2\theta_2+\sin^2\theta_2}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2+\sin^2\theta_2}$$

三角関数の加法定理　$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

を適用すると

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)}{1}=\frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$$

以上から，次のことが成り立つ。

0 でない 2 つの複素数 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$において

$\boxed{1}$ $\boldsymbol{z_1z_2=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}}$

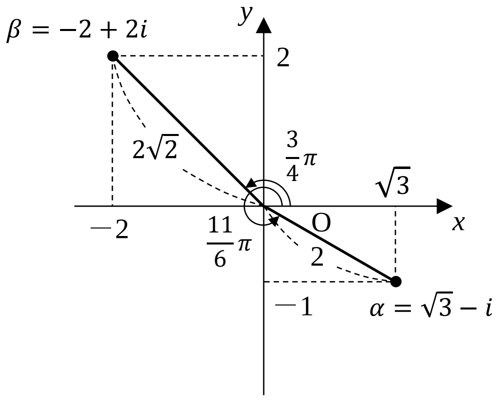
これから　$\boldsymbol{|z_1z_2|=|z_1||z_2|}$，$\boldsymbol{\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2}$

$\boxed{2}$ $\boldsymbol{\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}}$

これから　$\boldsymbol{\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}}$，$\boldsymbol{\arg\dfrac{z_1}{z_2}=\arg z_1-\arg z_2}$

解答

α， βの極形式は



$$\alpha=\sqrt{3}-i=2\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi\right)$$

$$\beta=-2+2i=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$$

であるから

$$\boldsymbol{\alpha\beta}=2\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi\right)\cdot 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$$

$$=4\sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{11}{6}\pi+\frac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{11}{6}\pi+\frac{3}{4}\pi\right)\right\}$$

$$=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{31}{12}\pi+i\sin\frac{31}{12}\pi\right)=\boldsymbol{4\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{12}\pi+i\sin\frac{7}{12}\pi\right)}$$

$$\boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta}}=\frac{2\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi\right)}{2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(\frac{11}{6}\pi-\frac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{11}{6}\pi-\frac{3}{4}\pi\right)\right\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{13}{12}\pi+i\sin\frac{13}{12}\pi\right)}$$

7 複素数の積を表す点

2 つの複素数 $\alpha=1+i$，z について，点 αz は点 z をどのように移動した点か。

要　点

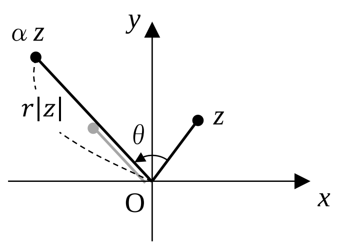
複素数 αz を表す点は，点 z を

原点 O のまわりに $\arg\alpha$ だけ回転し，

原点からの距離を $|\alpha|$ 倍

した点である。

$\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$のとき



解答

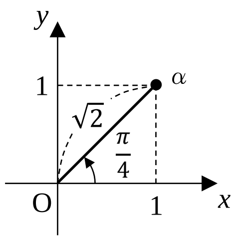
$$\alpha=1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

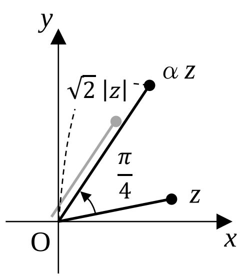
であるから，**点 αz は**

点zを，原点Oのまわりに$\frac{\pi}{4}$だけ

回転し，原点からの距離を$\sqrt{2}$倍

した点である。





$\boxed{8}$ 複素数の商を表す点

2 つの複素数$\alpha=\sqrt{3}+i$，zについて，点$\dfrac{z}{\alpha}$は点zをどのように移動した点か。

要　点

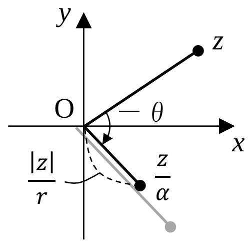
複素数$\dfrac{z}{\alpha}$を表す点は，点zを

原点 O のまわりに$-\arg\alpha$だけ回転し，

原点からの距離を$\dfrac{1}{|\alpha|}$倍

した点である。

$\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$のとき



解答

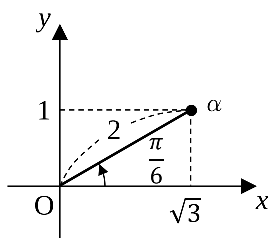
$\alpha=\sqrt{3}+i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

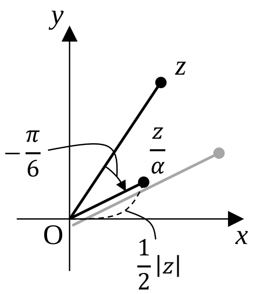
であるから，点$\boldsymbol{\dfrac{z}{\alpha}}$は

点zを，原点Oのまわりに$-\dfrac{\pi}{6}$だけ

回転し，原点からの距離を$\dfrac{1}{2}$倍

した点である。





$\boxed{9}$ 複素数の n 乗の計算（ド・モアブルの定理の利用）

次の計算をせよ。

(1)　$\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$　　　(2)　$(1-i)^6$

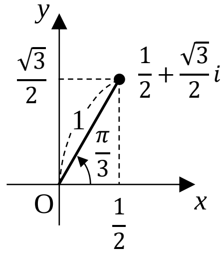
要　点

ド・モアブルの定理

n が整数のとき　$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

解答

(1)　$\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$

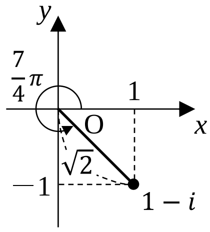


であるから，ド・モアブルの定理により

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^3=\cos\left(3\cdot\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(3\cdot\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\cos\pi+i\sin\pi=\mathbf{-1}$$

(2)　$1-i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7}{4}\pi+i\sin\dfrac{7}{4}\pi\right)$



であるから，ド・モアブルの定理により

$$(1-i)^6=\left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right)\right\}^6$$

$$=(\sqrt{2})^6\cdot\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right)^6=8\cdot\left\{\cos\left(6\cdot\frac{7}{4}\pi\right)+i\sin\left(6\cdot\frac{7}{4}\pi\right)\right\}$$

$$=8\left(\cos\frac{21}{2}\pi+i\sin\frac{21}{2}\pi\right)=8\left\{\cos\left(10\pi+\frac{1}{2}\pi\right)+i\sin\left(10\pi+\frac{1}{2}\pi\right)\right\}$$

$$=8\left(\cos\frac{1}{2}\pi+i\sin\frac{1}{2}\pi\right)=\boldsymbol{8i}$$

１０　**方程式 $z^n=1$ の解**

極形式を利用して，方程式 $z^3=1$ を解け。

要　点

解を $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおき，ド・モアブルの定理 $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ を利用する。
右辺の 1 も極形式で表し，**絶対値** と **偏角** を両辺で比較して z を求める。
θ は $0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で考えるとよい。

解答

$r>0$，$0\leqq\theta<2\pi$ として，$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと，ド・モアブルの定理により

$z^3=r^3(\cos3\theta+i\sin3\theta)$　　また，1 の極形式は　$1=1(\cos0+i\sin0)$

よって　$r^3(\cos3\theta+i\sin3\theta)=1(\cos0+i\sin0)$

ここで，1 の偏角は $0+2k\pi$（k は整数）であるから，両辺の絶対値と偏角を比較すると

$r^3=1$，$3\theta=2k\pi$（k は整数）

$r>0$ であるから　$r=1$　　また　$\theta=\dfrac{2}{3}k\pi$　　$0\leqq\theta<2\pi$の範囲で考えると　$k=0$，1，2

したがって，$\theta=0$，$\dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{4}{3}\pi$ であるから，求める解は

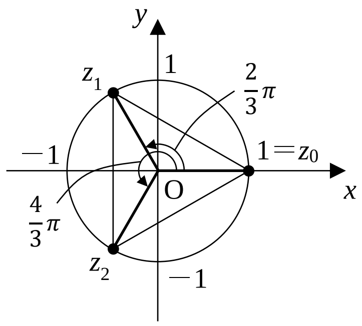
$z=\cos0+i\sin0$，$\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi$，$\cos\dfrac{4}{3}\pi+i\sin\dfrac{4}{3}\pi$　　すなわち　$\boldsymbol{z=1}$，$\boldsymbol{\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}}$，$\boldsymbol{\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}}$

コ ラ ム

方程式 $z^3=1$ の解

$$z=1,\ \frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

を順に z_0，z_1，z_2 として，複素数平面上に図示すると右の図のようになる。



3 点 z_0，z_1，z_2 は単位円に内接する正三角形の頂点となっている。

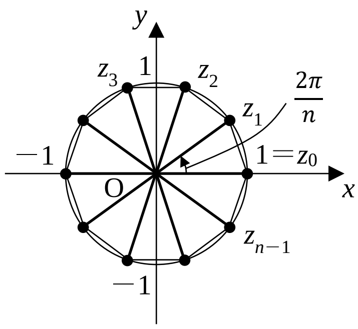
また，$z_1=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$ であり

$$z_1{}^2=\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)^2=\cos\left(2\cdot\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(2\cdot\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$=\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi=z_2$$

であるので，$z_2=z_1{}^2$ が成り立つ。

一般に，n が自然数のとき，$z^n=1$ を満たす複素数 z を **1 の n 乗根** という。複素数平面上に図示すると，点 1 を 1 つの頂点とする単位円に内接する正 n 角形の頂点となっている。



$$\boldsymbol{z=\cos\left(\frac{2\pi}{n}\times k\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\times k\right)}$$

ただし　$k=0$，1，……，$n-1$

と表すことができ，$k=0$，1，……，$n-1$ のときの z を順に z_0，z_1，……，z_{n-1} とすると，　$\boldsymbol{z_k=z_1{}^k}$　が成り立つ。

$\boxed{１１}$　**方程式 $z^n=\alpha$ の解（複素数 α の n 乗根）**

方程式 $z^4=-1$ を解け。

要　点

（要点は，「$\boxed{１０}$　**方程式 $z^n=1$ の解**」とほぼ同じ。）

解を　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$　とおき，ド・モアブルの定理

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

を利用する。

右辺も極形式で表し，　**絶対値**　と　**偏角**　を両辺で比較して z を求める。

θ は　$0\leqq\theta<2\pi$　の範囲で考えるとよい。

解答

$r>0$，$0 \leqq \theta < 2\pi$ として，$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと，ド・モアブルの定理により

$z^4=r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)$　　　また，-1 の極形式は　$-1=1(\cos\pi+i\sin\pi)$

よって　$r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)=1(\cos\pi+i\sin\pi)$

ここで，-1 の偏角は $\pi+2k\pi$（k は整数）であるから，両辺の絶対値と偏角を比較すると

$r^4=1$，$4\theta=\pi+2k\pi$（k は整数）

$r>0$ であるから　$r=1$　　また　$\theta=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k}{2}\pi$　　$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で考えると　$k=0$，1，2，3

したがって，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{3}{4}\pi$，$\dfrac{5}{4}\pi$，$\dfrac{7}{4}\pi$ であるから，求める解は

$$z=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4},\quad \cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi,\quad \cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi,\quad \cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi$$

すなわち　$\boldsymbol{z=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2},\ \dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2},\ \dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}}$

１２　**線分の内分点・外分点，三角形の重心を表す複素数**

(1)　2 点 P$(-1+5i)$，Q$(5+2i)$を結ぶ線分 PQ を 1 : 2 に内分する点，外分する点を表す複素数を，それぞれ求めよ。また，線分 PQ の中点を表す複素数を求めよ。

(2)　3 点 A$(-1+5i)$，B$(5+2i)$，C$(2-4i)$を頂点とする△ABC の重心を表す複素数を求めよ。

要　点

線分の内分点，外分点

2 点 A(α)，B(β)を結ぶ線分 AB を $m:n$ に　内分する点は　$\boldsymbol{\dfrac{n\alpha+m\beta}{m+n}}$，　外分する点は　$\boldsymbol{\dfrac{-n\alpha+m\beta}{m-n}}$

特に，線分 AB の中点は　$\boldsymbol{\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$

三角形の重心

3 点 A(α)，B(β)，C(γ)を頂点とする △ABC の重心は　$\boldsymbol{\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}}$

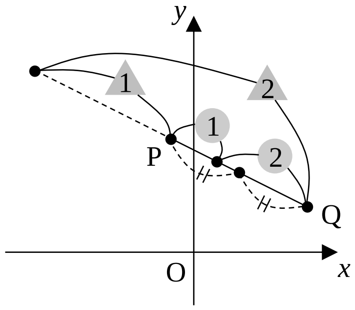
解答

(1)　線分 PQ を 1 : 2 に

内分する点は　$\dfrac{2(-1+5i)+1\cdot(5+2i)}{1+2}=\dfrac{3+12i}{3}=\boldsymbol{1+4i}$

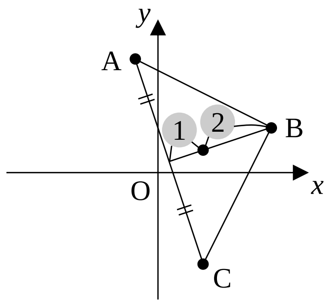
外分する点は　$\dfrac{-2(-1+5i)+1\cdot(5+2i)}{1-2}=\dfrac{7-8i}{-1}=\boldsymbol{-7+8i}$

線分 PQ の**中点は**　$\dfrac{(-1+5i)+(5+2i)}{2}=\boldsymbol{\dfrac{4+7i}{2}}$



(2)　求める重心は

$$\frac{(-1+5i)+(5+2i)+(2-4i)}{3}=\frac{6+3i}{3}=\boldsymbol{2+i}$$



１３　**2 点間の距離**

2 点 P(－1＋5i)，Q(5＋2i) 間の距離を求めよ。

要　点

複素数平面上の 2 点 α，β 間の距離は　$|\boldsymbol{\beta-\alpha}|$

〈注意〉a，bを実数とする。$z=a+bi$のとき　$|\boldsymbol{z}|=\sqrt{\boldsymbol{a^2+b^2}}$

解答

$|(5+2i)-(-1+5i)|=|6-3i|=\sqrt{6^2+(-3)^2}=\sqrt{45}=\boldsymbol{3\sqrt{5}}$

１４　**等式を満たす点のえがく図形(1)**　（垂直二等分線，円）

次の等式を満たす点 z のえがく図形を求めよ。

(1)　$|z-2|=|z+3i|$　　(2)　$|3z-4+5i|=6$

要　点

垂直二等分線

異なる 2 定点 A(α)，B(β)と動点 P(z)に対して

$|z-\alpha|=|z-\beta| \iff$ AP＝BP $\iff$ 点 P は 2 点 A，B から等距離にある

したがって，**等式 $|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\alpha}|=|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\beta}|$ を満たす点 $\boldsymbol{z}$ のえがく図形は，2 点 A($\boldsymbol{\alpha}$)，B($\boldsymbol{\beta}$)を結ぶ線分 AB の垂直二等分線**である。

円

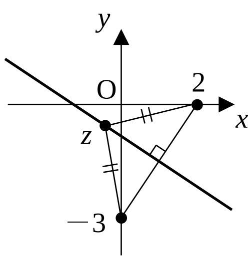
定点 A(α)と動点 P(z)，正の実数 r に対して

$|z-\alpha|=r \iff$ AP＝r $\iff$ 点 P は点 A から一定の距離 r にある

したがって，**等式 $|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\alpha}|=\boldsymbol{r}$ を満たす点 $\boldsymbol{z}$ のえがく図形は，点 A($\boldsymbol{\alpha}$)を中心とする半径 $\boldsymbol{r}$ の円**である。

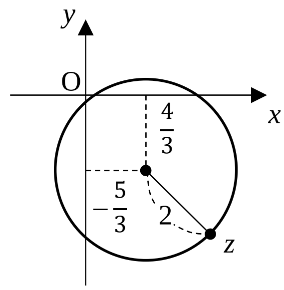
解答

(1)　$|z-2|=|z+3i|$ から，点 z は **2 点 2，$-3i$ を結ぶ線分の垂直二等分線** をえがく。



(2)　与えられた等式を変形すると　$\left|z-\dfrac{4-5i}{3}\right|=2$

よって，点zは **点$\dfrac{4-5i}{3}$を中心とする半径2の円** をえがく。



コ ラ ム

(1)，(2)は，x，yを実数とし，$z=x+yi$とおいて $|z|^2=z\bar{z}$ を利用すると，xy平面上の図形の方程式を求める方法で点 z のえがく図形を求めることもできる。
また，$z=x+yi$ とおくことで，次の点 z のえがく図形を求めることもできる。

① $z+\bar{z}=a$　(aは実数)

② $z-\bar{z}=bi$　(bは実数)

解答

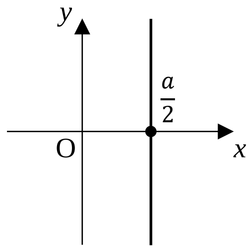
①　$z=x+yi$とおくと，$\bar{z}=x-yi$であるから

$$z+\bar{z}=(x+yi)+(x-yi)=2x$$

よって，$2x=a$より　$x=\dfrac{a}{2}$

したがって，$z=\dfrac{a}{2}+yi$であるから，点zは

点$\dfrac{a}{2}$を通り，実軸に垂直な直線 をえがく。



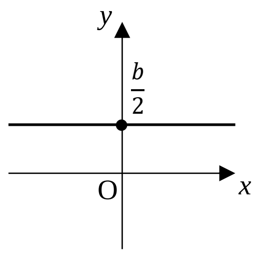
②　$z=x+yi$とおくと，$\bar{z}=x-yi$であるから

$$z-\bar{z}=(x+yi)-(x-yi)=2yi$$

よって，$2yi=bi$より　$y=\dfrac{b}{2}$

したがって，$z=x+\dfrac{b}{2}i$であるから，点zは

点$\dfrac{b}{2}i$を通り，虚軸に垂直な直線 をえがく。



１５　等式を満たす点のえがく図形(2)　（アポロニウスの円）

等式 $|z|=2|z+3i|$ を満たす点 z のえがく図形を求めよ。

要　点

等式の両辺を 2 乗して，$|z|^2=z\,\bar{z}$ を利用して絶対値をはずす。
共役な複素数の性質　$\boldsymbol{\overline{\alpha+\beta}=\bar{\alpha}+\bar{\beta}}$，$\boldsymbol{\overline{\alpha-\beta}=\bar{\alpha}-\bar{\beta}}$，$\boldsymbol{z\,\bar{z}=|z|^2}$
を用いて，「$\boxed{1\,4}$　**等式を満たす点のえがく図形(1)**」で学習したような，既知の形に変形する。

解答

等式の両辺を 2 乗すると　$|z|^2=4|z+3i|^2$
共役な複素数の性質により

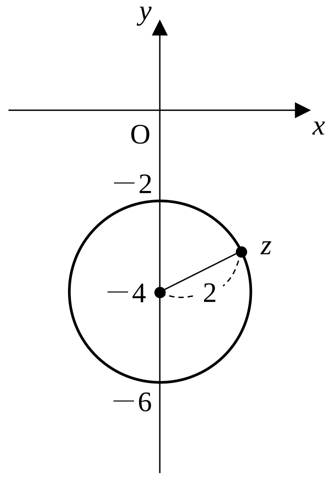
$$z\,\bar{z}=4(z+3i)\overline{(z+3i)}$$
$$=4(z+3i)(\bar{z}-3i)$$

展開すると　$z\,\bar{z}=4(z+3i)(\bar{z}-3i)=4(z\,\bar{z}-3i\,z+3i\,\bar{z}-9i^2)=4z\,\bar{z}-12i\,z+12i\,\bar{z}+36$
整理すると　$z\,\bar{z}-4i\,z+4i\,\bar{z}+12=0$
絶対値の 2 乗ができるように変形すると

$$z(\bar{z}-4i)+4i(\bar{z}-4i)+16i^2+12=0$$
$$(z+4i)(\bar{z}-4i)=4$$
$$(z+4i)\overline{(z+4i)}=4$$
$$|z+4i|^2=2^2$$

$\overline{z+4i}=\bar{z}-4i$であることを考慮して，
$(z+4i)(\bar{z}-4i)$
の形ができるように式変形する。

よって　$|z+4i|=2$
したがって，点 z は**点$-4i$ を中心とする半径 2 の円**をえがく。



コ ラ ム

x，yを実数とし，$z=x+yi$とおいて $\boldsymbol{|z|^2=z\,\bar{z}}$ を利用すると，xy平面上の図形の方程式を求める方法で点 z のえがく図形を求めることもできる。
また，2 定点 O(0)，A($-3i$)と動点 P(z)とすると，与えられた等式は

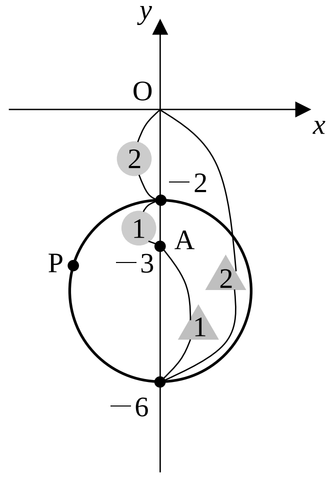
OP＝2AP　　すなわち　OP：AP＝2：1

とみることができる。これはアポロニウスの円であるから，動点 P は線分 OA を 2：1 に

内分する点，すなわち　$\dfrac{0-6i}{2+1}=-2i$　と，

外分する点，すなわち　$\dfrac{-0-6i}{2-1}=-6i$

を直径とする円をえがく。



16　ともなって動く点のえがく図形

点 z が原点 O を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，$w=zi+2-i$ を満たす点 w のえがく図形を求めよ。

要　点

① 点 z の条件を満たす等式を求める。

② 与えられた w の条件式を z について解き，①の等式に代入する。

③ ②の等式から，点 w のえがく図形を求める。

解答

点 z は原点 O(0)を中心とする半径 1 の円をえがくから　$|z|=1$　……①

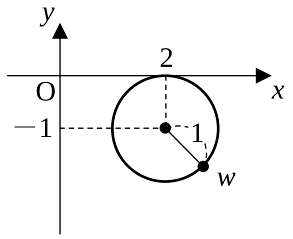
$w=zi+2-i$ から　$zi=w-2+i$　　$z=\dfrac{w-2+i}{i}$　　よって　$z=-iw+2i+1$

これを①に代入すると　$|-iw+2i+1|=1$　　$|-i|\left|w-2-\dfrac{1}{i}\right|=1$

ここで，$|-i|=\sqrt{0^2+(-1)^2}=1$，$-\dfrac{1}{i}=i$ であるから

$|w-(2-i)|=1$

したがって，点 w は **点 $2-i$ を中心とする半径 1 の円** をえがく。



17　2 直線のなす角，3 点が一直線上にある条件，垂直条件

(1)　3 点を A($2+3i$)，B($-1+2i$)，C($-i$)とするとき，∠BAC の大きさを求めよ。

(2)　3 点 A($2+3i$)，B($-1+2i$)，C($a+i$)が次の条件を満たすように，実数 a の値を定めよ。

①　3 点 A，B，C が一直線上にある　　　②　AB⊥AC

要　点

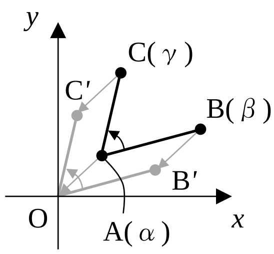
2 直線のなす角

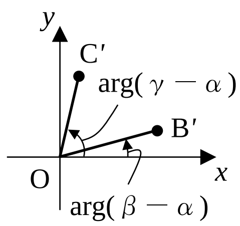
異なる 3 点 A(α)，B(β)，C(γ)に対して，半直線 AB から半直線 AC へ測った角∠BAC について考える。

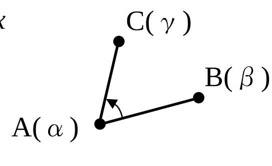
点 A を原点 O に移す平行移動によって，点 B，C をそれぞれ点 B′，C′ に移すとき，点 B′，C′ を表す複素数はそれぞれ $\beta-\alpha$，$\gamma-\alpha$ であるから

$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{B'OC'}=\arg(\gamma-\alpha)-\arg(\beta-\alpha)=\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$

以上をまとめると，異なる 3 点を A(α)，B(β)，C(γ)とするとき　$\boldsymbol{\angle\mathrm{BAC}=\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}}$





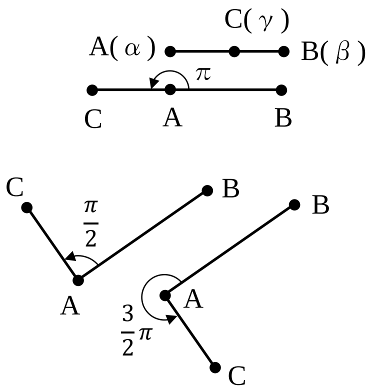


3 点が一直線上にある条件，垂直条件

異なる 3 点 A(α)，B(β)，C(γ)に対して，$0 \leqq \angle\mathrm{BAC} < 2\pi$ とすると

・$\angle\mathrm{BAC}=0$ または π のとき，3 点 A，B，C は一直線上にある。

・$\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{2}$ または $\dfrac{3}{2}\pi$ のとき，$\mathrm{AB}\perp\mathrm{AC}$ である。



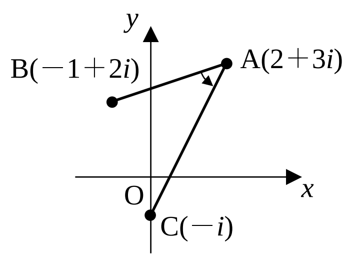
したがって，異なる 3 点 A(α)，B(β)，C(γ)に対して，次のことが成り立つ。

・**3点A，B，Cが一直線上にある** $\iff$ $\boldsymbol{\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}}$ **が実数**

・$\mathbf{AB}\perp\mathbf{AC}$ $\iff$ $\boldsymbol{\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}}$ **が純虚数**

解答

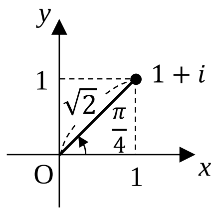
(1) $\angle\mathrm{BAC}=\arg\dfrac{-i-(2+3i)}{(-1+2i)-(2+3i)}=\arg\dfrac{-2-4i}{-3-i}$



$$=\arg\frac{(-2-4i)(-3+i)}{(-3-i)(-3+i)}=\arg\frac{6-2i+12i-4i^2}{9-i^2}$$

$$=\arg\frac{10+10i}{10}=\arg(1+i)$$

ここで，$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ であるから



$$\arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$$

よって　$\angle\mathrm{BAC}=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}}$

(2) $\alpha=2+3i$，$\beta=-1+2i$，$\gamma=a+i$ とし，まず $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ を計算すると

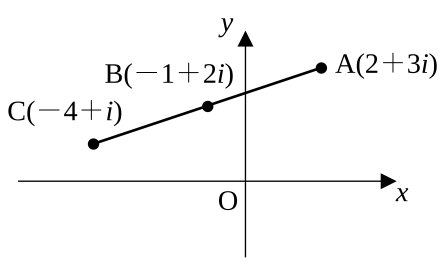
$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{(a+i)-(2+3i)}{(-1+2i)-(2+3i)}=\frac{(a-2)-2i}{-3-i}=\frac{\{(a-2)-2i\}(-3+i)}{(-3-i)(-3+i)}$$

$$=\frac{-3(a-2)+(a-2)i+6i-2i^2}{9-i^2}=\frac{(-3a+8)+(a+4)i}{10}\quad\cdots\cdots\text{(i)}$$

① 3 点 A，B，C が一直線上にあるには，

(i)が実数であればよい。

よって，$a+4=0$ から　$\boldsymbol{a=-4}$

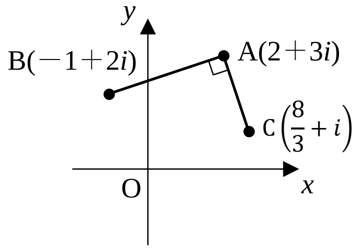


② AB⊥AC となるには，

(i)が純虚数であればよい。

よって，$-3a+8=0$ かつ $a+4\neq 0$ から

$$\boldsymbol{a=\frac{8}{3}}$$



１８ 三角形の形状

(1) 異なる 3 点 A(α)，B(β)，C(γ)に対して，等式 $\beta+\alpha i=\gamma(1+i)$ が成り立つとき，△ABC はどのような三角形か。

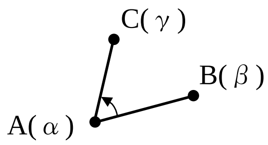
(2) 異なる 3 点 O(0)，A(α)，B(β)に対して，等式 $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2=0$ が成り立つとき，△OAB はどのような三角形か。

要 点

(1) 異なる 3 点 A(α)，B(β)，C(γ)に対して，

$$\boldsymbol{\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=z}$$

となるとすると **∠BAC＝arg z**



である。また，$\dfrac{|\gamma-\alpha|}{|\beta-\alpha|}=|z|$ であるから

AC：AB＝|z|：1

である。これらにより，2 辺の比とその間の角がわかるので，△ABC の形状がわかる。

よって，△ABC の形状を調べるときは，次の形に変形する。

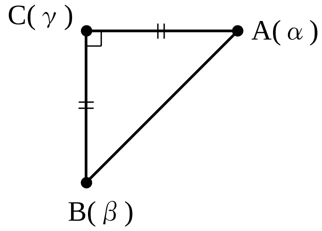
$$\frac{\triangle-\bigcirc}{\square-\bigcirc}=\boldsymbol{x+yi}$$ **（○，□，△は頂点を表す複素数，x，yは実数）**

(2) 三角形の頂点の 1 つが原点であるから，複素数 $\dfrac{\alpha}{\beta}$ を求めれば，(1)と同様にして△OAB の形状を調べることができる。

解答

(1) 等式を変形すると，$\beta+\alpha i=\gamma+\gamma i$ より $\beta-\gamma=(\gamma-\alpha)i$

よって $\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}=-i$



ここで，$|-i|=1$ であり，

$\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}$ は純虚数であるから

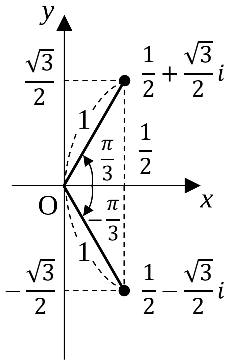
CA＝CB， CA⊥CB

したがって，△ABC は **CA＝CB の直角二等辺三角形**である。

(2)　$\beta \neq 0$ より $\beta^2 \neq 0$ であるから，等式の両辺を β^2 で割ると

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} - \frac{\alpha}{\beta} + 1 = 0$$

よって　$\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{1-4}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

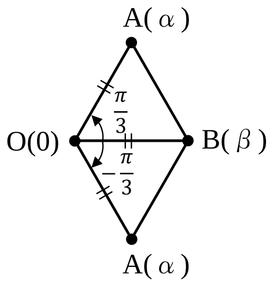


ここで，$\dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3} \pm i\sin\dfrac{\pi}{3}$ であるから

$$\left|\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}\right| = 1,\quad \arg\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \pm\frac{\pi}{3}$$

したがって，$\mathrm{OB} = \mathrm{OA}$，$\angle\mathrm{BOA} = \pm\dfrac{\pi}{3}$ である

から，△OAB は **正三角形** である。



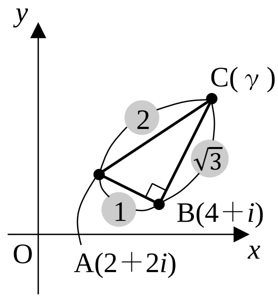
$\boxed{１９}$　**点αのまわりの回転移動と拡大・縮小**

(1)　$\alpha = 2 + 2i$，$\beta = 4 + i$とするとき，点βを点αのまわりに$\dfrac{\pi}{4}$だけ回転した点を表す複素数zを求めよ。

(2)　3 点 A(2＋2i)，B(4＋i)，C(γ) を頂点とする三角形が，右の図のような

$$\mathrm{AB} : \mathrm{AC} : \mathrm{BC} = 1 : 2 : \sqrt{3}$$

の直角三角形であるとき，γ を求めよ。



要　点

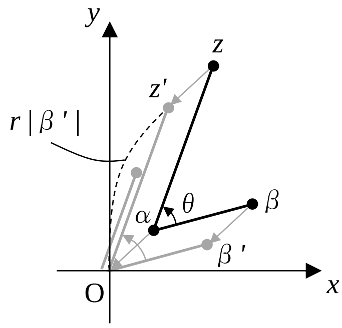
点 β を，点 α のまわりに θ だけ回転し，点 α からの距離を r 倍した点 z について考える。

点 α を原点 O に移す平行移動によって，

点 β，z をそれぞれ点 β′，z' に移すとき，点 β′，z' を表す複素数はそれぞれ

β－α，z－α である。

点 β′ を原点 O のまわりに θ だけ回転し，原点からの距離を r 倍した点が z' である。



よって，「$\boxed{7}$　**複素数の積を表す点**」で

学習したことから　$z' = r(\cos\theta + i\sin\theta) \cdot \beta'$

すなわち　$z - \alpha = (\beta - \alpha) \cdot r(\cos\theta + i\sin\theta)$

以上をまとめると，点 β を，点 α のまわりに θ だけ回転し，点 α からの距離を r 倍した点 z を表す複素数は

$$\boldsymbol{z = (\beta - \alpha) \cdot r(\cos\theta + i\sin\theta) + \alpha}$$

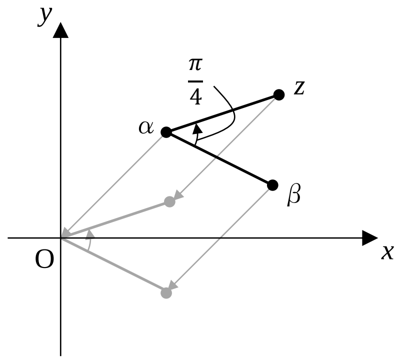
解答

(1)　$\boldsymbol{z}=\{(4+i)-(2+2i)\}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)+(2+2i)$

$=(2-i)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}\right)+(2+2i)$

$=\sqrt{2}+\sqrt{2}i-\frac{\sqrt{2}}{2}i-\frac{\sqrt{2}}{2}i^2+2+2i$

$=\boldsymbol{2+\frac{3\sqrt{2}}{2}+\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i}$



(2)　$\alpha=2+2i$，$\beta=4+i$とすると，点γは，点βを点αのまわりに$\frac{\pi}{3}$だけ回転し，点αからの距離を 2 倍した点である。

よって　$\boldsymbol{\gamma}=\{(4+i)-(2+2i)\}\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)+(2+2i)$

$=(2-i)\cdot 2\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)+(2+2i)=2+2\sqrt{3}i-i-\sqrt{3}i^2+2+2i$

$=\boldsymbol{4+\sqrt{3}+(1+2\sqrt{3})i}$

研究　**不等式$|z-\alpha|\leqq r$の表す領域**

複素数 z が，不等式 $|3z-4+5i|\leqq 6$ を満たすとき，点 z の表す領域を図示せよ。

要　点

定点 A(α)と動点 P(z)，正の実数 r に対して

$|z-\alpha|\leqq r \iff \mathrm{AP}\leqq r \iff$ 2 点 P，A 間の距離は r 以下

したがって，**等式 $|z-\alpha|\leqq r$ を満たす点 z の表す領域は，点 A(α)を中心とする半径 r の円およびその内部**である。

〈注意〉・不等式 $|z-\alpha|<r$ の表す領域は，点 α を中心とする半径 r の円の内部

・不等式 $|z-\alpha|\geqq r$ の表す領域は，点 α を中心とする半径 r の円およびその外部

・不等式 $|z-\alpha|>r$ の表す領域は，点 α を中心とする半径 r の円の外部

解答

与えられた等式を変形すると　$\left|z-\frac{4-5i}{3}\right|\leqq 2$

よって，点zの表す領域は，

点$\frac{4-5i}{3}$を中心とする半径2の円およびその内部

で，右の図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。