平面上のベクトル

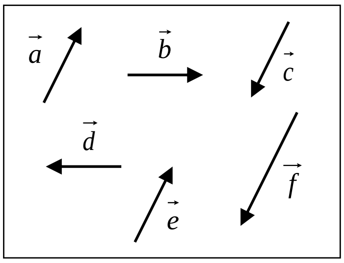
1　ベクトル

右の図において，次のベクトルを選べ。

(1)　等しいベクトル

(2)　大きさが等しいベクトル

(3)　向きが等しいベクト



要　点

ベクトルとは・・・

大きさと向きをもつもの。図示するときは矢印で表すと分かりやすい。
平行移動して一致するベクトルは，等しいベクトルである。
「力のつり合い」などを考えるとき，ベクトルで考えると分かりやすくなる。

解答

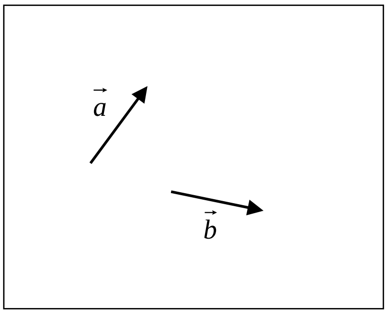
(1)　$\vec{\boldsymbol{a}}$ と $\vec{\boldsymbol{e}}$

(2)　$\vec{\boldsymbol{a}}$ と $\vec{\boldsymbol{c}}$ と $\vec{\boldsymbol{e}}$，$\vec{\boldsymbol{b}}$ と $\vec{\boldsymbol{d}}$

(3)　$\vec{\boldsymbol{a}}$ と $\vec{\boldsymbol{e}}$，$\vec{\boldsymbol{c}}$ と $\vec{\boldsymbol{f}}$

2　ベクトルの加法，減法，実数倍

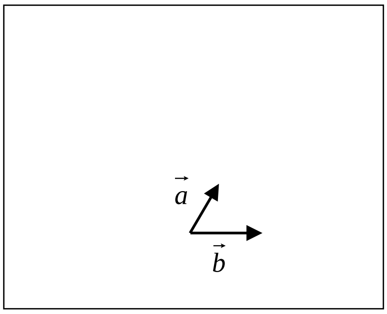
(1)　右の図の 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，
$\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{a}-\vec{b}$ を図示せよ。



(2)　右の図の 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，
次のベクトルを図示せよ。

①　$3\vec{a}$　　　　②　$-2\vec{b}$

③　$2\vec{a}-\vec{b}$

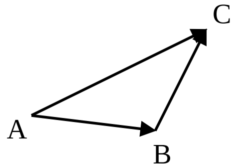


要　点

ベクトルの加法

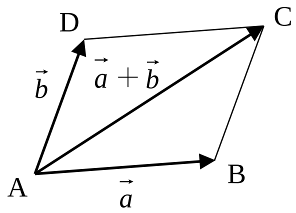
$\overrightarrow{\mathbf{AB}}+\overrightarrow{\mathbf{BC}}=\overrightarrow{\mathbf{AC}}$

と定める。



平行四辺形 ABCD において，2 つのベクトル $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$

とすると，ベクトルの和 $\vec{a}+\vec{b}$ は対角線 AC で図示できる。



ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の加法 $\vec{a}+\vec{b}$ では, $\vec{a}$ の終点を $\vec{b}$ の始点に合わせると, $\vec{a}$ の始点と $\vec{b}$ の終点をつないだもの。

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の始点を合わせれば，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ を 2 辺にもつ平行四辺形の対角線のうち，始点が共通となるもの。

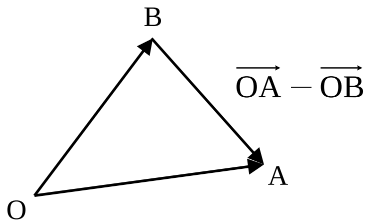
ベクトルの減法

$-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BO}$ と定める。

$-\overrightarrow{OB}$ を $\overrightarrow{BO}$ の **逆ベクトル** という。

このとき　$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}$

$=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BA}$



O を任意の点とすると

$\overrightarrow{\mathbf{O}終}-\overrightarrow{\mathbf{O}始}=\overrightarrow{始終}$

とまとめることができる。

ベクトルの実数倍

ベクトル $\vec{a}$ と実数 k に対して，$k\vec{a}$ を次のように定める。

・$k>0$ のとき，$k\vec{a}$ は $\vec{a}$ と同じ向きで，大きさは $|\vec{a}|$ の k 倍

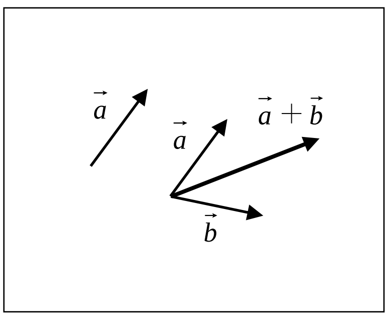
〈注意〉$|\vec{a}|$ はベクトル $\vec{a}$ の大きさ

・$k<0$ のとき，$k\vec{a}$ は $\vec{a}$ と反対の向きで，大きさは $|\vec{a}|$ の $|k|$ 倍

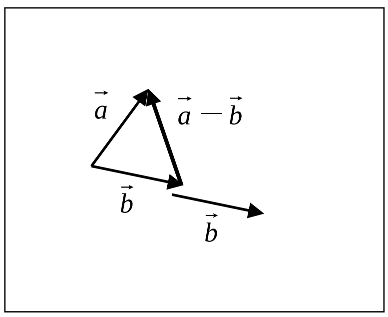
・$k=0$ のとき　$k\vec{a}=\vec{0}$

解答

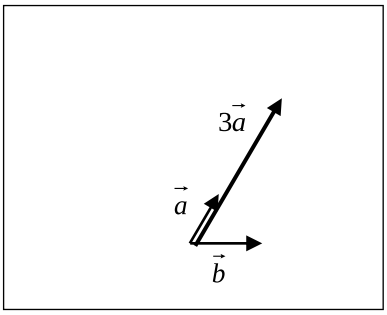
(1)　$\vec{a}+\vec{b}$

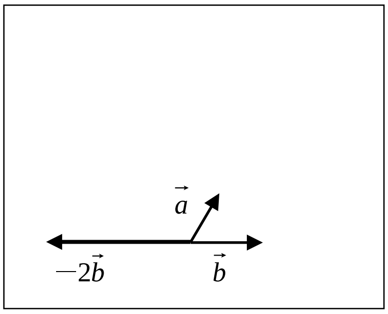


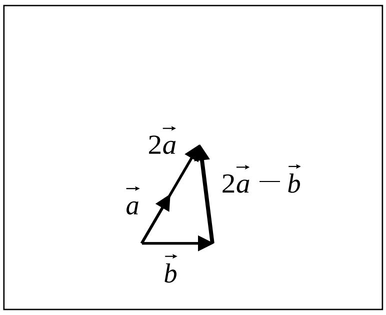
$\vec{a}-\vec{b}$



(2)　①　$3\vec{a}$　　　②　$-2\vec{b}$　　　③　$2\vec{a}-\vec{b}$







3　ベクトルの演算

等式 $3(\vec{a}+2\vec{x})-\vec{b}=2(\vec{x}+4\vec{b})+\vec{x}$ を満たすベクトル $\vec{x}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

要　点

k，l を実数とする。
ベクトルの加法，減法，実数倍については，
文字式と同じように計算できる。

1　交換法則　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

2　結合法則　$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

3　逆ベクトル　$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

4　$\vec{0}$ の計算　$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$

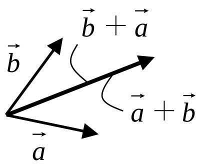
〈注意〉始点と終点が一致するベクトルを
零ベクトル といい，$\vec{\mathbf{0}}$ で表す。

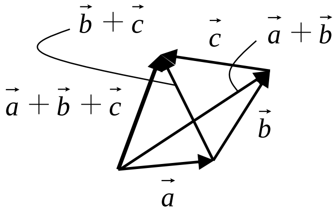
5　$k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$

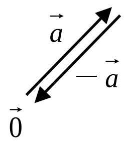
6　$(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$

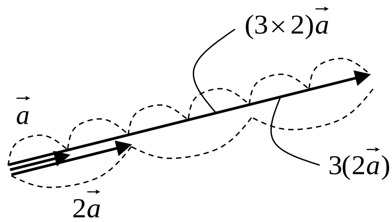
7　$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

〈注意〉 2 は $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$， 5 は $kl\vec{a}$
と表すことができる。







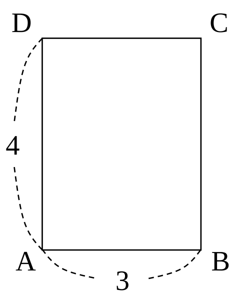


解答

展開すると　$3\vec{a}+6\vec{x}-\vec{b}=2\vec{x}+8\vec{b}+\vec{x}$　　よって　$\boldsymbol{\vec{x}=-\vec{a}+3\vec{b}}$

4　ベクトルの平行，単位ベクトル

右の図のような長方形 ABCD において，
$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と平行な単位ベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$
を用いて表せ。



要　点

ベクトルの平行

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき　　$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{b}=k\vec{a}$ **となる実数** k **がある**

単位ベクトル

大きさが 1 のベクトルを **単位ベクトル** という。$\vec{a}\neq\vec{0}$ のとき，$\vec{a}$ と平行な単位ベクトルは　$\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ と $-\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

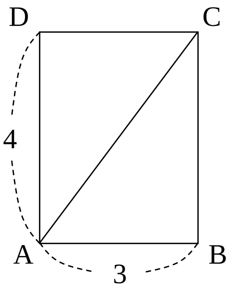
解答

$\mathrm{AC}=\sqrt{3^2+4^2}=5$,

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

より，求める単位ベクトルは

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{5},\quad -\frac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=-\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{5}$$



$\boxed{5}$　**ベクトルの成分，大きさ**

$\vec{a}=(4,\ -1)$，$\vec{b}=(3,\ -2)$のとき，$-3\vec{a}+2\vec{b}$ を成分で表せ。また，その大きさを求めよ。

要　点

ベクトルの成分表示

x 軸上の点 $\mathrm{E}_1(1,\ 0)$と y 軸上の $\mathrm{E}_2(0,\ 1)$に対して，2 つの単位ベクトル$\vec{e_1}=\overrightarrow{\mathrm{OE_1}}$，$\vec{e_2}=\overrightarrow{\mathrm{OE_2}}$ を基本ベクトルという。

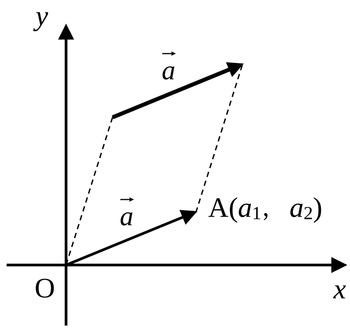
ベクトル$\vec{a}$に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$ となる点 A の座標を$(a_1,\ a_2)$とする。

点 A から x 軸，y 軸にそれぞれ垂線 $\mathrm{AA_1}$，$\mathrm{AA_2}$ を引くと

$$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}+\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}=a_1\vec{e_1}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}=a_2\vec{e_2}$ であるから，$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$ と表される。

このとき，実数 a_1，a_2 を$\vec{a}$の成分といい，a_1 を x 成分，a_2 を y 成分という。ベクトル$\vec{a}$を成分を用いて表すと，$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ となり，このような表し方を，**$\vec{a}$ の成分表示** という。



ベクトルの相等

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$のとき　　$\vec{a}=\vec{b}$ $\Leftrightarrow$ $a_1=b_1$ **かつ** $a_2=b_2$

ベクトルの大きさ

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$のとき　　$|\vec{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}$

成分によるベクトルの演算

$\boxed{1}$　$(a_1,\ a_2)+(b_1,\ b_2)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$

$\boxed{2}$　$(a_1,\ a_2)-(b_1,\ b_2)=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$

$\boxed{3}$　$k(a_1,\ a_2)=(ka_1,\ ka_2)$　　ただし，k は実数

解答

$-3\vec{a}+2\vec{b}=-3(4,\ -1)+2(3,\ -2)=(-12,\ 3)+(6,\ -4)=\boldsymbol{(-6,\ -1)}$

$|-3\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{(-6)^2+(-1)^2}=\boldsymbol{\sqrt{37}}$

6　**ベクトルの分解**

$\vec{a}=(4,\ -1)$，$\vec{b}=(3,\ -2)$のとき，$\vec{p}=(10,\ 0)$を$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$の形で表せ。

要　点

2 つのベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$が$\vec{0}$でなく，平行でないとする。すなわち，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$のとき，任意のベクトル$\vec{p}$は

$\boldsymbol{\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}}$　　ただし，s，tは実数

の形に，ただ 1 通りに表される。

〈注意〉2 つのベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$が$\vec{0}$でなく，平行でないとき，$\vec{a}$と$\vec{b}$は **1 次独立である** という。

解答

$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$を成分で表すと　$(10,\ 0)=s(4,\ -1)+t(3,\ -2)=(4s+3t,\ -s-2t)$

よって　$\begin{cases}10=4s+3t\\0=-s-2t\end{cases}$　　これを解いて　$s=4$，$t=-2$

したがって　$\boldsymbol{\vec{p}=4\vec{a}-2\vec{b}}$

7　**座標とベクトルの成分，ベクトルの平行**

次の問いに答えよ。

(1)　4 点 A(4，1)，B(3，-2)，C(-2，0)，D を頂点とする平行四辺形 ABCD がある。頂点 D の座標を求めよ。

(2)　2 つのベクトル$\vec{a}=(4,\ 1)$，$\vec{b}=(3+t,\ -2+t)$が平行になるように，tの値を定めよ。

要　点

(1)　四角形 ABCD が平行四辺形になる条件に，「1 組の向かい合う辺が平行で等しい」がある。

すなわち　　**四角形 ABCD が平行四辺形 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}$**

〈注意〉点 D の座標が定まっていないとき，平行四辺形 ABCD は 1 通りしかないが，4 点 A，B，C，D を頂点とする平行四辺形は 3 通りある。

(2)　**4**　**ベクトルの平行，単位ベクトル** でも扱った，次の性質を利用する。

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$のとき　　$\boldsymbol{\vec{a}\parallel\vec{b}\ \Leftrightarrow\ \vec{b}=k\vec{a}}$ **となる実数 k がある**

解答

(1)　頂点 D の座標を$(x,\ y)$とおく。

四角形 ABCD が平行四辺形であるから

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}$

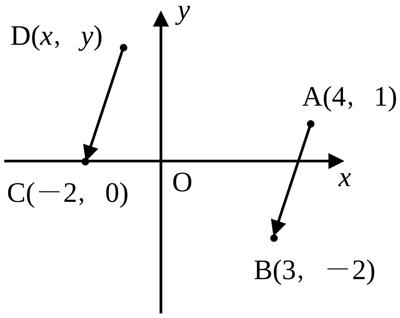
ここで　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3-4,\ -2-1)$

$=(-1,\ -3)$

$\overrightarrow{\mathrm{DC}}=(-2-x,\ 0-y)$

$=(-2-x,\ -y)$

2 点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ について
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$



よって　$\begin{cases}-1=-2-x\\-3=-y\end{cases}$　　これを解いて　$x=-1$，$y=3$

したがって　**D(−1，3)**

(2)　$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}/\!/\vec{b}$ より，$\vec{b}=k\vec{a}$ となる実数 k があるから

$(3+t,\ -2+t)=k(4,\ 1)$

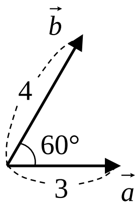
よって　$\begin{cases}3+t=4k\\-2+t=k\end{cases}$　　これを解いて　$k=\dfrac{5}{3}$，$t=\dfrac{11}{3}$

したがって　$\boldsymbol{t=\dfrac{11}{3}}$

8　ベクトルの内積

次の内積を求めよ。

(1)　$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が $60°$
のときの，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$



(2)　$\vec{a}=(4,\ -1)$，$\vec{b}=(3,\ -2)$のときの，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$

要　点

内積の定義

$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とするとき　　$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$　　ただし　$0°\leqq\theta\leqq180°$

〈注意〉 $\vec{a}=\vec{0}$　または　$\vec{b}=\vec{0}$ のときは，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ とする。

内積と成分

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$のとき　　$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2}$

解答

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos60°=3\times4\times\dfrac{1}{2}=\mathbf{6}$

(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=4\times3+(-1)\times(-2)=\mathbf{14}$

9　ベクトルのなす角とベクトルの垂直

次の問いに答えよ。

(1)　2 つのベクトル $\vec{a}=(1,\ 4)$，$\vec{b}=(5,\ 3)$のなす角 θ を求めよ。

(2)　$\vec{a}=(4,\ -1)$，$\vec{b}=(3+2x,\ -2+x)$が垂直であるとき，x の値を求めよ。

要　点

ベクトルのなす角

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$のなす角を θ とすると，次のことが成り立つ。

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2}}\qquad \text{ただし}\quad 0°\leqq\theta\leqq180°$$

ベクトルの垂直条件

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$について，次のことが成り立つ。

$\boldsymbol{\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0}$

すなわち　$\boldsymbol{\vec{a}\perp\vec{b} \iff a_1b_1+a_2b_2=0}$

解答

(1)　$\cos\theta=\dfrac{1\times5+4\times3}{\sqrt{1^2+4^2}\sqrt{5^2+3^2}}=\dfrac{17}{\sqrt{17}\sqrt{34}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\boldsymbol{\theta=45°}$

(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=4\times(3+2x)+(-1)\times(-2+x)=7x+14$

$\vec{a}\perp\vec{b}$ となるには，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ となればよいので　$7x+14=0$　　よって　$\boldsymbol{x=-2}$

１０　内積の性質の利用

次の問いに答えよ。

(1)　等式 $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$ を証明せよ。

(2)　$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13}$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。ただし，$0°\leqq\theta\leqq180°$ とする。

要　点

内積の性質

・$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}}$

・$\boldsymbol{\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}}$　　$\boldsymbol{(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}}$

・$\boldsymbol{(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})}$　　ただし，k は実数

・$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2}$

〈注意〉 これらは，$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$，$\vec{c}=(c_1,\ c_2)$として計算することで確かめられる。

(2)　ベクトルの大きさは，2 乗して考える。

解答

(1)　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})+\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}$

$$=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$

(2)　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=3^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+4^2=25-2\vec{a}\cdot\vec{b}$

これと，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13}$ から　$25-2\vec{a}\cdot\vec{b}=13$　　よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=6$

したがって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{6}{3\cdot4}=\dfrac{1}{2}$　　$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\boldsymbol{\theta=60°}$

１１　**三角形の面積**

3 点 O(0，0)，A(3，1)，B(−1，2)を頂点とする三角形の面積 S を求めよ。

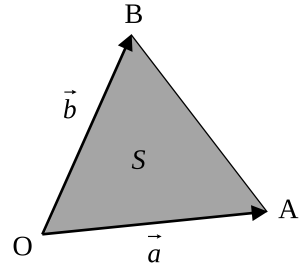
要　点

△OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，

△OAB の面積 S は

$$\boldsymbol{S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}}$$

で表される。



$\boxed{\text{証明}}$　$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると，$0°<\theta<180°$ より

$\sin\theta>0$　　よって　$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$

また，$S=\dfrac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ より

$$S=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1-\cos^2\theta)}=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

また，$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$とすると

$$\boldsymbol{S=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|}$$

で表される。

$\boxed{\text{証明}}$　$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(a_1{}^2+a_2{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a_1{}^2b_2{}^2+a_2{}^2b_1{}^2-2a_1b_1a_2b_2}=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2}=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$$

解答

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(3,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(-1,\ 2)$であるから

$$S=\frac{1}{2}|3\times2-1\times(-1)|=\boldsymbol{\frac{7}{2}}$$

１２　内分点，外分点，三角形の重心の位置ベクトル

(1)　2 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)を結ぶ線分 AB に対して，次の点の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いてそれぞれ表せ。

①　3 : 4 に内分する点 P($\vec{p}$)　　②　中点 M($\vec{m}$)　　③　3 : 4 に外分する点 Q($\vec{q}$)

(2)　3 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$)を頂点とする△ABC において，辺 BC の中点を M とする。△ABM の重心 G($\vec{g}$)を，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

要　点

位置ベクトルとは・・・

平面上において 1 点 O を固定すると，点 P の位置は $\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ によって定まる。このとき，$\vec{p}$ を点 O に関する点 P の **位置ベクトル** という。

ベクトルとは大きさと向きをもつもので，平行移動して重なるものは同じベクトルと考えていた。

位置ベクトルは，適当に点 O を定めることで，点をベクトルと見なすという考え方である。

成分表示 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a_1,\ a_2)$は，点 O に関する点 A の位置ベクトルともいえる。

内分点・外分点の位置ベクトル

2 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)を結ぶ線分 AB を

1　$m:n$ に**内分**する点を P($\vec{p}$)とすると　$\boldsymbol{\vec{p}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}}$

特に，点 P が線分 AB の**中点**であるとき　$\boldsymbol{\vec{p}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}}$

2　$m:n$ に**外分**する点を Q($\vec{q}$)とすると　$\boldsymbol{\vec{q}=\dfrac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}=\dfrac{n\vec{a}-m\vec{b}}{-m+n}}$

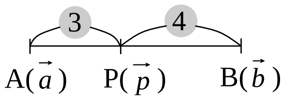
〈注意〉外分の公式は，m，n の小さい方にマイナスを付けて内分の公式に代入すればよい。

三角形の重心の位置ベクトル

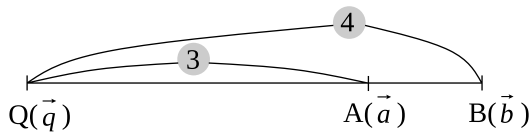
3 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$)を頂点とする△ABC の重心 G の位置ベクトル $\vec{g}$ は　$\boldsymbol{\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}}$

解答

(1)　①　$\vec{p}=\dfrac{4\vec{a}+3\vec{b}}{3+4}=\boldsymbol{\dfrac{4\vec{a}+3\vec{b}}{7}}$



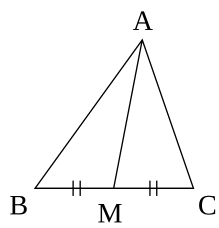
②　$\vec{m}=\boldsymbol{\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}}$



③　$\vec{q}=\dfrac{4\vec{a}-3\vec{b}}{-3+4}=\boldsymbol{4\vec{a}-3\vec{b}}$

(2)　点 M($\vec{m}$)とすると　$\vec{m}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$

よって，△ABM の重心 G($\vec{g}$)は　$\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}}{3}=\boldsymbol{\dfrac{2\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}}{6}}$



１３　3 点が一直線上にある条件

平行四辺形 ABCD において，辺 BC を 4 : 3 に内分する点を P，対角線 BD を 4 : 7 に内分する点を Q とするとき，3 点 A，Q，P は一直線上にあることを証明せよ。

要　点

3 点 A，B，C が一直線上にある $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる定数 k がある

証明

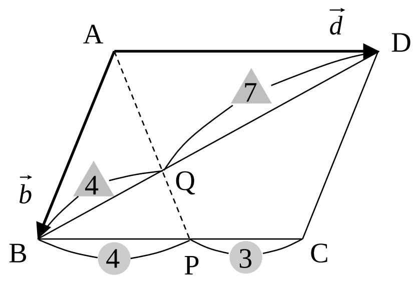
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}$$

$$=\vec{b}+\frac{4}{7}\vec{d}$$

$$=\frac{7\vec{b}+4\vec{d}}{7}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{7\overrightarrow{\mathrm{AB}}+4\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{4+7}=\frac{7\vec{b}+4\vec{d}}{11}$$

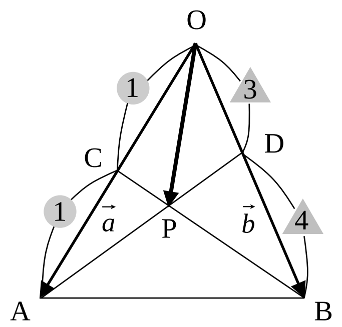


よって　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{7}{11}\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

したがって，3 点 A，Q，P は一直線上にある。

１４　交点の位置ベクトル

△OAB において，辺 OA の中点を C，辺 OB を 3 : 4 に内分する点を D とし，線分 AD と BC の交点を P とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。



要　点

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を 2 通りに表す。

・△OAD において，点 P は AP：PD＝s：$(1-s)$に内分しているとみる。

・△OBC において，点 P は BP：PC＝t：$(1-t)$に内分しているとみる。

解答

点 P は線分 AD 上にあるから，実数 s を用いて　AP：PD＝s：$(1-s)$

とすると　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OD}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1-s)\vec{a}+\dfrac{3}{7}s\vec{b}$　……①

また，点 P は線分 BC 上にあるから，実数 t を用いて　BP：PC＝t：$(1-t)$

とすると　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{1}{2}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$　……②

①，②から　$(1-s)\vec{a}+\dfrac{3}{7}s\vec{b}=\dfrac{1}{2}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるから　$\begin{cases} 1-s=\dfrac{1}{2}t \\ \dfrac{3}{7}s=1-t \end{cases}$

> $\boxed{6}$　**ベクトルの分解** で，ベクトルの表し方は 1 通りであることを学習している。

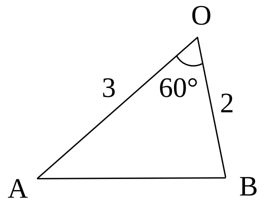
これを解くと　$s=\dfrac{7}{11}$，$t=\dfrac{8}{11}$　　したがって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{4}{11}\vec{a}+\dfrac{3}{11}\vec{b}}$

$\boxed{15}$　**内積と図形の性質**

OA＝3，OB＝2，∠AOB＝60° の△OAB がある。
次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(2)　△OAB の垂心を H とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。



要　点

垂心は頂点から対辺へ引いた 3 本の垂線の交点であるから，OH⊥AB，AH⊥OB である。
よって，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ であることを利用する。

解答

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle\mathrm{AOB}=3\times2\times\cos60^\circ=\mathbf{3}$

(2)　OH⊥AB から　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$　　ここで，実数 s，t を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とする。

このとき　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(s\vec{a}+t\vec{b})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=-s|\vec{a}|^2+(s-t)\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=-9s+3(s-t)+4t=-6s+t$

よって　$-6s+t=0$　……①

また，AH⊥OB から　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\{(s\vec{a}+t\vec{b})-\vec{a}\}\cdot\vec{b}=\{(s-1)\vec{a}+t\vec{b}\}\cdot\vec{b}$

$=(s-1)\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=3(s-1)+4t=3s-3+4t$

したがって　$3s+4t-3=0$　……②

①，②を連立させて解くと　$s=\dfrac{1}{9}$，$t=\dfrac{2}{3}$　　以上から　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{9}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}}$

１６　ベクトル方程式

(1)　点 A(2，0)を通り，方向ベクトルが $\vec{u}=(4,\ -1)$ である直線 l を，媒介変数 t を用いて表示せよ。
また，直線 l の方程式を求めよ。

(2)　2 点(4，−1)，B(3，−2)を通る直線 l を，媒介変数 t を用いて表示せよ。
また，直線 l の方程式を求めよ。

(3)　点 A(0，2)を通り，法線ベクトルが $\vec{n}=(3,\ -2)$ である直線 l の方程式を求めよ。

(4)　定点 A($\vec{a}$)と動点 P($\vec{p}$)に対して，次のベクトル方程式で表される円の中心の位置ベクトルと半径を求めよ。

①　$|\vec{p}-2\vec{a}|=3$　　　　②　$|2\vec{p}+\vec{a}|=2$

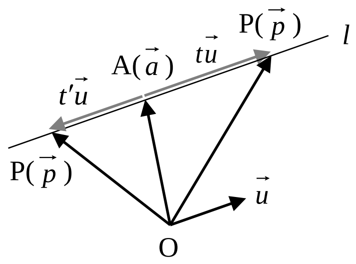
要　点

ベクトル方程式とは・・・

図形上の任意の点の位置ベクトル $\vec{p}$ が満たす関係式を，その図形の **ベクトル方程式** という。

直線のベクトル方程式

直線 l 上の任意の点 P の位置ベクトルを $\vec{p}$ とし，s，t を実数とする。



1　定点 A($\vec{a}$)を通り，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{u}$ に平行な直線 l

$$\boldsymbol{\vec{p}=\vec{a}+t\vec{u}}$$

〈注意〉 $\vec{u}$ を直線の **方向ベクトル** という。

2　異なる 2 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)を通る直線 l

$$\boldsymbol{\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}}\qquad \text{または}\qquad \boldsymbol{\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b},\ s+t=1}$$

3　定点 A($\vec{a}$)を通り，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{n}$ に垂直な直線 l

$$\boldsymbol{\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0}$$

〈注意〉 $\vec{n}$ を直線の **法線ベクトル** という。

円のベクトル方程式

円周上の任意の点を P($\vec{p}$)とする。

1　中心 C($\vec{c}$)，半径 r の円

$$\boldsymbol{|\vec{p}-\vec{c}|=r}$$

2　異なる 2 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)を直径の両端とする円

$$\boldsymbol{(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0}$$

解答

(1)　直線 l 上の任意の点を P(x，y)とし，点 P の位置ベクトルを $\vec{p}$ とすると，$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{u}$ から

$(x,\ y)=(2,\ 0)+t(4,\ -1)=(2+4t,\ -t)$　　よって　$\begin{cases} \boldsymbol{x=4t+2} \\ \boldsymbol{y=-t} \end{cases}$

$4t=x-2$ から　$t=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{2}$　　したがって，求める直線 l の方程式は　$\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}}$

(2)　直線 l 上の任意の点を P(x，y)とし，点 P の位置ベクトルを $\vec{p}$ とすると，$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$ から

$(x,\ y)=(1-t)(4,\ -1)+t(3,\ -2)=(4(1-t)+3t,\ -(1-t)-2t)=(4-t,\ -1-t)$

よって　$\begin{cases} \boldsymbol{x=-t+4} \\ \boldsymbol{y=-t-1} \end{cases}$　　求める直線 l の方程式は，t を消去して　$\boldsymbol{y=x-5}$

(3)　直線 l 上の任意の点を P(x，y)とし，点 P の位置ベクトルを $\vec{p}$ とすると，$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$ から

$(3,\ -2)\cdot((x,\ y)-(0,\ 2))=(3,\ -2)\cdot(x,\ y-2)=3x-2(y-2)=3x-2y+4$

よって，求める直線 l の方程式は　$\boldsymbol{3x-2y+4=0}$

〈注意〉点 A の座標を$(x_1,\ y_1)$，点 P の座標を$(x,\ y)$，$\vec{n}=(a,\ b)$とすると，$\vec{p}-\vec{a}=(x-x_1,\ y-y_1)$から

$\boldsymbol{a(x-x_1)+b(y-y_1)=0}$

となる。これを本問に用いると　$3(x-0)-2(y-2)=0$　　よって　$3x-2y+4=0$

(4)　①　**中心の位置ベクトルは** $\boldsymbol{2\vec{a}}$**，半径は 3**

②　$|2\vec{p}+\vec{a}|=2$ を変形すると　$\left|\vec{p}-\left(-\dfrac{1}{2}\vec{a}\right)\right|=1$

よって，**中心の位置ベクトルは** $\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}\vec{a}}$**，半径は 1**

１７　**平面上の点の存在範囲**

△OAB に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする。実数 s，t が次の条件を満たしながら動くとき，点 P の存在範囲を求めよ。

(1)　$2s+t=2$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$　　　(2)　$2s+t\leqq 2$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

要　点

1　**点 P が線分 AB 上にある**

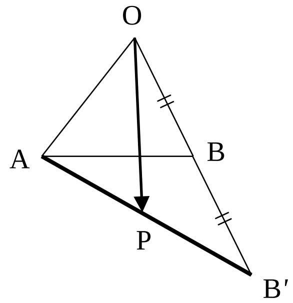
$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$　　$\boldsymbol{s+t=1,\ s\geqq 0,\ t\geqq 0}$

2　**点 P が△OAB の周上および内部にある**

$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$　　$\boldsymbol{s+t\leqq 1,\ s\geqq 0,\ t\geqq 0}$

解答

(1)　$2s+t=2$ より　$s+\dfrac{t}{2}=1$



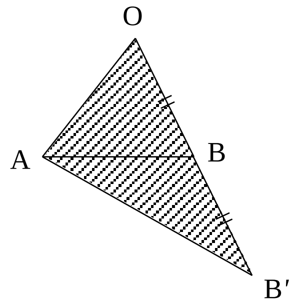
$$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=s\overrightarrow{OA}+\frac{t}{2}(2\overrightarrow{OB})$$

ここで，$s=s'$，$\dfrac{t}{2}=t'$ とおくと

$$\overrightarrow{OP}=s'\overrightarrow{OA}+t'(2\overrightarrow{OB}) \qquad s'+t'=1,\ s'\geqq 0,\ t'\geqq 0$$

したがって，$\mathbf{2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}}$ **となるような点 B′ をとると，点 P の存在範囲は線分 AB′ である。**

(2)　$2s+t\leqq 2$ より　$s+\dfrac{t}{2}\leqq 1$



$$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=s\overrightarrow{OA}+\frac{t}{2}(2\overrightarrow{OB})$$

ここで，$s=s'$，$\dfrac{t}{2}=t'$ とおくと

$$\overrightarrow{OP}=s'\overrightarrow{OA}+t'(2\overrightarrow{OB}) \qquad s'+t'\leqq 1,\ s'\geqq 0,\ t'\geqq 0$$

したがって，$\mathbf{2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}}$ **となるような点 B′ をとると，点 P の存在範囲は△OAB′ の周上および内部である。**