分数関数，無理関数，逆関数，合成関数

$\boxed{1}$ **分数関数**

(1)　次の関数のグラフの漸近線を求め，そのグラフをかけ。

①　$y=\dfrac{3}{x-2}+1$　　　　②　$y=\dfrac{2x}{x+3}$

(2)　2 つの関数$y=\dfrac{4}{x-1}$，$y=3x-2$ について，次の問いに答えよ。

①　2 つの関数のグラフの共有点の座標を求めよ。

②　グラフを利用して，不等式$\dfrac{4}{x-1}<3x-2$ を解け。

要　点

分数関数$y=\dfrac{k}{x}$（$k\neq 0$）のグラフ

・関数$y=\dfrac{k}{x}$の定義域は$x\neq 0$，値域は$y\neq 0$

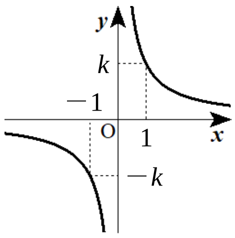
・グラフは原点に関して対称

・$k>0$ のときは第 1，3 象限，$k<0$ のときは第 2，4 象限にある。

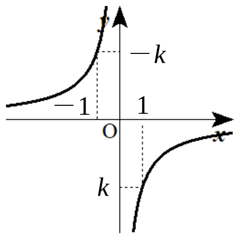
・漸近線は x 軸，y 軸

〈注意〉漸近線が垂直に交わるから，**直角双曲線** である。

$k>0$ のとき



$k<0$ のとき



分数関数$y=\dfrac{k}{x-p}+q$（$k\neq 0$）のグラフ

・関数$y=\dfrac{k}{x-p}+q$のグラフは，$y=\dfrac{k}{x}$のグラフを　**x軸方向にp，y軸方向にqだけ平行移動**したものである。

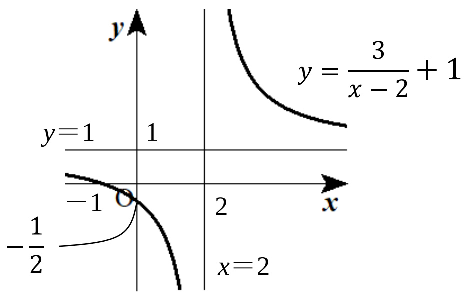
・関数$y=\dfrac{k}{x-p}+q$の定義域は$x\neq p$，値域は$y\neq q$　　・漸近線は 2 直線$x=p$，$y=q$

(1)　②の関数は，$y=\dfrac{k}{x-p}+q$の形に変形する。

解答

(1)　①　漸近線は，**2 直線 $x=2$，$y=1$**

グラフは右の図のようになる。



② $\dfrac{2x}{x+3}=\dfrac{2(x+3)-6}{x+3}=-\dfrac{6}{x+3}+2$

よって，与えられた関数は

$y=-\dfrac{6}{x+3}+2$ と変形できる。

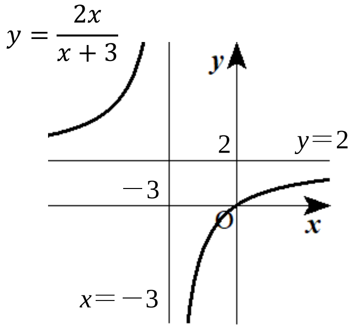
したがって，漸近線は

2 直線 $x=-3$，$y=2$

グラフは右の図のようになる。

$$\begin{array}{r} 2 \\ x+3\,\overline{)\,2x\quad} \\ \underline{2x+6} \\ -6 \end{array}$$

$2x=2(x+3)-6$
と変形できる。



(2) ① $\dfrac{4}{x-1}=3x-2$　　両辺に$x-1$ を掛けて　$4=(3x-2)(x-1)$

展開して整理すると　$3x^2-5x-2=0$　　よって　$(x-2)(3x+1)=0$

これを解くと　$x=2,\ -\dfrac{1}{3}$

$y=3x-2$ に$x=2$ を代入すると　$y=4$　　$x=-\dfrac{1}{3}$ を代入すると　$y=-3$

したがって共有点の座標は　$\boldsymbol{(2,\ 4),\ \left(-\dfrac{1}{3},\ -3\right)}$

関数$y=\dfrac{4}{x-1}$ の定義域は $x\neq1$ であることに注意する。

② 関数$y=\dfrac{4}{x-1}$ と直線$y=3x-2$ のグラフは

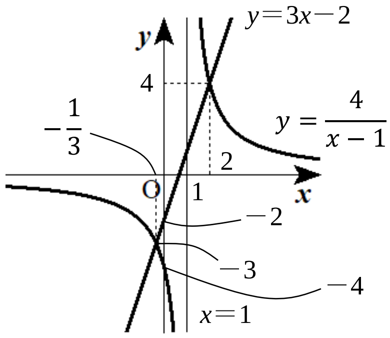
右の図のようになる。

求める不等式の解は，$y=\dfrac{4}{x-1}$ のグラフが

直線 $y=3x-2$ より下側にある部分に対する

x の値の範囲であるから

$$\boldsymbol{-\frac{1}{3}<x<1,\ 2<x}$$



$\boxed{2}$ **無理関数**

(1) 次の関数のグラフをかけ。

① $y=\sqrt{3x}$　　② $y=-\sqrt{3(x-2)}$　　③ $y=\sqrt{-2x-6}$

(2) 2 つの関数$y=\sqrt{x+2}$，$y=2x+1$ について，次の問いに答えよ。

① 2 つの関数のグラフの共有点の座標を求めよ。

② グラフを利用して，不等式$\sqrt{x+2}>2x+1$ を解け。

要　点

無理関数$\boldsymbol{y=\sqrt{ax}}$（$\boldsymbol{a\neq 0}$）のグラフ

・a＞0 のとき

関数$y=\sqrt{ax}$の

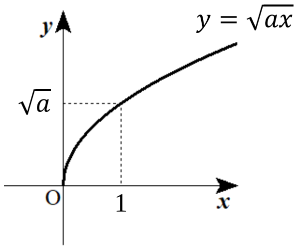
定義域は x≧0，値域は y≧0

・a＜0 のとき

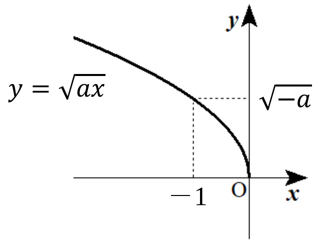
関数$y=\sqrt{ax}$の

定義域は x≦0，値域は y≦0

a＞0 のとき

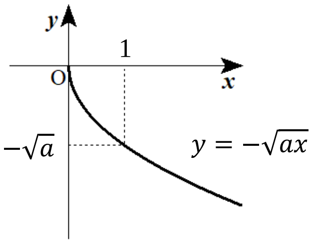


a＜0 のとき

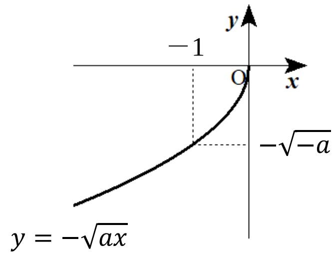


$y=-\sqrt{ax}$のグラフは，$y=\sqrt{ax}$のグラフを
x 軸に関して対称移動したものである。

a＞0 のとき



a＜0 のとき



無理関数$\boldsymbol{y=\sqrt{a(x-p)}}$（$\boldsymbol{a\neq 0}$）のグラフ

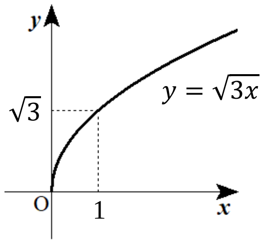
$y=\sqrt{a(x-p)}$のグラフは，$y=\sqrt{ax}$のグラフを　**$\boldsymbol{x}$軸方向に$\boldsymbol{p}$だけ平行移動**　したものである。

(1)　③の関数は，$y=\sqrt{a(x-p)}$の形に変形する。

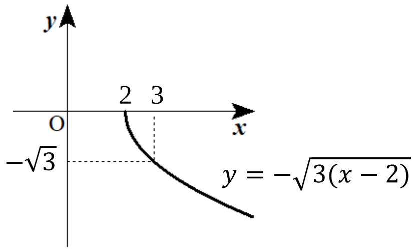
(2)　無理関数の定義域に注意する。

解答

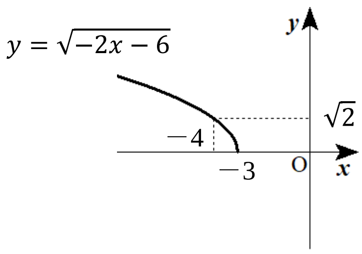
(1)　①　グラフは右の図のようになる。



②　グラフは右の図のようになる。



③　与えられた関数は　$y=\sqrt{-2(x+3)}$
と変形できる。
よって，グラフは右の図のようになる。



(2)　①　$\sqrt{x+2}=2x+1$　……$(*)$

両辺を 2 乗すると　$x+2=(2x+1)^2$　　$x+2=4x^2+4x+1$

$4x^2+3x-1=0$　　$(x+1)(4x-1)=0$　　これを解くと　$x=-1,\ \dfrac{1}{4}$

$x=-1$ は$(*)$を満たさない。　（左辺）$=1$,（右辺）$=-1$

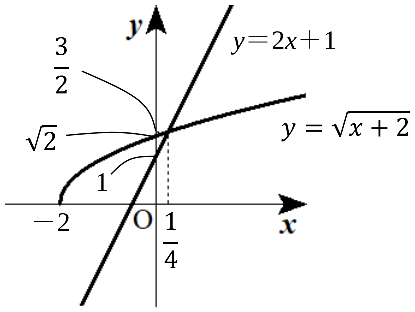
$x=\dfrac{1}{4}$は$(*)$を満たす。　$(\text{左辺})=\dfrac{3}{2}$，$(\text{右辺})=\dfrac{3}{2}$

よって，共有点の座標は　$\left(\boldsymbol{\dfrac{1}{4}},\ \boldsymbol{\dfrac{3}{2}}\right)$

②　関数$y=\sqrt{x+2}$と直線$y=2x+1$ のグラフは右の図のようになる。

求める不等式の解は，$y=\sqrt{x+2}$のグラフが直線 $y=2x+1$ より上側にある部分に対する

xの値の範囲であるから　$\boldsymbol{-2\leqq x<\dfrac{1}{4}}$



3　**逆関数**

(1)　次の関数の逆関数を求めよ。

①　$y=2x+3$　　②　$y=-3x-1\ \ (-1\leqq x\leqq 2)$　　③　$y=\dfrac{4x-3}{2x+1}$　　④　$y=x^2+1\ \ (x\geqq 0)$

(2)　次の関数の逆関数のグラフをかけ。

①　$y=2^x$　　②　$y=\log_3 x$

要　点

逆関数

x の関数 $y=f(x)$は，x の値を定めるとそれに対応する y の値がただ 1 つに定まる。

x の関数 $y=f(x)$において，y の値を定めるとそれに対応する x の値がただ 1 つに定まるとき，すなわち，x が y の関数として $x=g(y)$と表されるとき，x と y を入れかえて $y=g(x)$と表したものを，もとの関数の **逆関数** といい，$\boldsymbol{y=f^{-1}(x)}$ で表す。

関数とその逆関数では，定義域と値域が入れかわる。

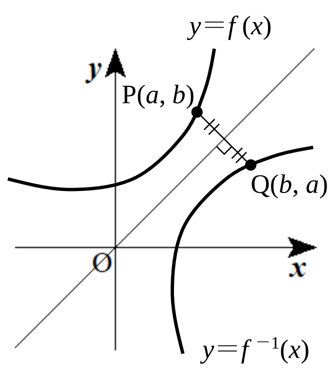
逆関数のグラフ

関数 $y=f(x)$とその逆関数 $y=f^{-1}(x)$があるとする。

関数 $y=f(x)$のグラフ上の点を P$(a,\ b)$とすると，$b=f(a)$であり，

逆関数の定義から　$\boldsymbol{b=f(a)\iff a=f^{-1}(b)}$

が成り立つ。よって，点 Q$(b,\ a)$は関数 $y=f^{-1}(x)$のグラフ上にあることがわかる。点 P$(a,\ b)$と点 Q$(b,\ a)$は直線 $y=x$ に関して対称であるから，**関数 $y=f(x)$とその逆関数 $y=f^{-1}(x)$のグラフは，直線 $y=x$ に関して対称である。**



解答

(1)　①　xについて解くと，$2x=y-3$ から　$x=\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}$

逆関数は，xとyをいれかえて　$\boldsymbol{y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}}$

②　この関数の値域は　$-7\leqq y\leqq 2$　　また，xについて解くと，$-3x=y+1$ から　$x=-\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}$

逆関数は，xとyをいれかえて　$\boldsymbol{y=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\ (-7\leqq x\leqq 2)}$

③　両辺に $2x+1$ を掛けると，$(2x+1)y=4x-3$ から　$2xy+y=4x-3$

$2xy-4x=-y-3$　　　$x(2y-4)=-y-3$　……(＊)

ここで，$y=\frac{4x-3}{2x+1}=\frac{2(2x+1)-5}{2x+1}=\frac{-5}{2x+1}+2$ より，直線$y=2$ は漸近線であるから　$y\neq 2$

(＊)の両辺を $2y-4$ で割ると　$x=\frac{-y-3}{2y-4}$　　　逆関数は，xとyを入れかえて　$\boldsymbol{y=\frac{-x-3}{2x-4}}$

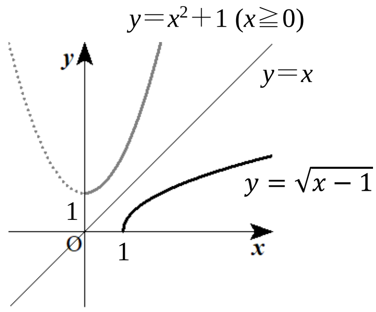
④　この関数の値域は　$y\geqq 1$

$y=x^2+1$ から　$x^2=y-1$

$y-1\geqq 0$ より　$x=\pm\sqrt{y-1}$

$x\geqq 0$ であるから　$x=\sqrt{y-1}$

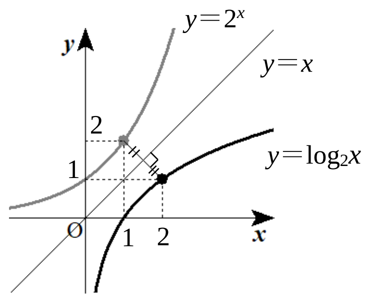
逆関数は，xとyを入れかえて　$\boldsymbol{y=\sqrt{x-1}}$



(2)　①　x について解くと　$x=\log_2 y$

逆関数は，x と y を入れかえて　$y=\log_2 x$

逆関数のグラフは右の図のようになる。



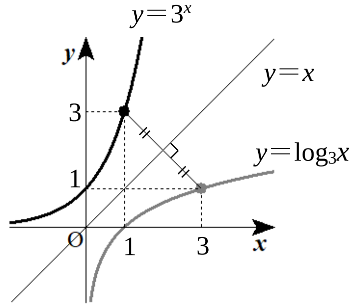
②　x について解くと　$x=3^y$

逆関数は，x と y を入れかえて　$y=3^x$

逆関数のグラフは右の図のようになる。

（左辺）$=y=y\times 1=y\times\log_3 3=\log_3 3^y$,

（右辺）$=\log_3 x$



4 **合成関数**

(1)　$f(x)=x^2-1$，$g(x)=\cos x$，$h(x)=2x+3$ とする。次の問いに答えよ。

　①　$(g\circ f)(x)$，$(f\circ g)(x)$を求めよ。　　　②　$(h\circ(g\circ f))(x)$，$((h\circ g)\circ f)(x)$を求めよ。

(2)　$f(x)=\dfrac{1}{2}x-1$ の逆関数を求めよ。また，$(f\circ f^{-1})(x)$，$(f^{-1}\circ f)(x)$をそれぞれ求めよ。

要　点

合成関数

y が u の関数で $y=g(u)$と表され，u が x の関数で $u=f(x)$と表されるとき，y は x の関数となる。その関数を f と g の **合成関数** といい，

$$\boldsymbol{y=g(f(x))} \quad \text{または} \quad \boldsymbol{y=(g\circ f)(x)}$$

で表す。

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "u=f(x)"'] \arrow[rr, bend left, "y=g(f(x))"] & u \arrow[r, "y=g(u)"'] & y \end{tikzcd}$$

解答

(1)　①　$\boldsymbol{(g\circ f)(x)}=g(f(x))=g(x^2-1)=\boldsymbol{\cos(x^2-1)}$

$\boldsymbol{(f\circ g)(x)}=f(g(x))=f(\cos x)=\boldsymbol{\cos^2 x-1}$

> 一般に，$(g\circ f)(x)\neq(f\circ g)(x)$である。

②　①より，$(g\circ f)(x)=\cos(x^2-1)$であるから　$\boldsymbol{(h\circ(g\circ f))(x)}=h(\cos(x^2-1))=\boldsymbol{2\cos(x^2-1)+3}$

また，$(h\circ g)(x)=h(g(x))=h(\cos x)=2\cos x+3$ であるから

$\boldsymbol{((h\circ g)\circ f)(x)}=2\cos f(x)+3=\boldsymbol{2\cos(x^2-1)+3}$

> 一般に，$(h\circ(g\circ f))(x)=((h\circ g)\circ f)(x)$が成り立つ。
> このことから，$h\circ(g\circ f)$や$(h\circ g)\circ f$ を単に $h\circ g\circ f$ と書くこともある。

(2)　xについて解くと，$\dfrac{1}{2}x=f(x)+1$ から　$x=2f(x)+2$

逆関数 $f^{-1}(x)$は，x と $f(x)$を入れかえて　$\boldsymbol{f^{-1}(x)=2x+2}$

また，$\boldsymbol{(f\circ f^{-1})(x)}=f(f^{-1}(x))=f(2x+2)=\dfrac{1}{2}(2x+2)-1=\boldsymbol{x}$

$$\boldsymbol{(f^{-1}\circ f)(x)}=f^{-1}(f(x))=f^{-1}\left(\frac{1}{2}x-1\right)=2\left(\frac{1}{2}x-1\right)+2=\boldsymbol{x}$$

> 一般に，$(f\circ f^{-1})(x)=(f^{-1}\circ f)(x)=x$ が成り立つ。
> よって，$(f\circ f^{-1})(x)=(f^{-1}\circ f)(x)$は (1) ①で述べた$(g\circ f)(x)\neq(f\circ g)(x)$の例外となっている。