部分分数分解

1　**分子の次数が，分母の次数以上の場合**

分数式$\dfrac{x^3}{(x+1)(x-2)}$を，部分分数に分解せよ。

要　点

分数式の分母が因数分解できるとき，その分数式を，各因数を分母にもつ分数式の和の形に変形することを，**部分分数に分解する**という。
分子の次数が分母の次数以上の場合は，分子を分母で割り，商と余りを求める。

$\dfrac{k}{(x-a)(x-b)}$ $\left(k\text{は 1 次式または定数，}a\text{，}b\text{ は定数}\right)$ という分数式は，$\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}$ $\left(A\text{，}B\text{ は定数}\right)$ のように変形できる。

定数A，B は，恒等式$\dfrac{k}{(x-a)(x-b)}=\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}$ から求めることができる。

解答

分子の次数が分母の次数以上であるので，まず分子を分母で割る。

$(x+1)(x-2)=x^2-x-2$ であるから

$x^3=(x+1)(x^2-x-2)+3x+2$

よって　$\dfrac{x^3}{(x+1)(x-2)}=\dfrac{(x+1)(x^2-x-2)+3x+2}{(x+1)(x-2)}$

$=\dfrac{(x+1)(x+1)(x-2)+3x+2}{(x+1)(x-2)}$

$=x+1+\dfrac{3x+2}{(x+1)(x-2)}$

$$\begin{array}{r}
x+1 \\
x^2-x-2\,\big)\,x^3 \\
\underline{x^3-x^2-2x} \\
x^2+2x \\
\underline{x^2-x-2} \\
3x+2
\end{array}$$

$\dfrac{3x+2}{(x+1)(x-2)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-2}$ $\left(A\text{，}B\text{ は定数}\right)$ とおく。両辺に $(x+1)(x-2)$ を掛けると

$3x+2=A(x-2)+B(x+1)=(A+B)x-2A+B$

これは，x についての恒等式であるので　$\begin{cases}3=A+B\\2=-2A+B\end{cases}$　　これを解くと　$A=\dfrac{1}{3}$，$B=\dfrac{8}{3}$

したがって　$\dfrac{x^3}{(x+1)(x-2)}=\boldsymbol{x+1+\dfrac{1}{3(x+1)}+\dfrac{8}{3(x-2)}}$

2　分母の因数に 2 次以上の多項式が含まれる場合
次の分数式を，部分分数に分解せよ。

(1)　$\dfrac{1}{x(x^2+1)}$　　　(2)　$\dfrac{1}{x^3-1}$

要　点

分母の因数に 2 次以上の多項式が含まれる場合，分子は分母の次数より 1 だけ小さい分数式にしか分解できない。例えば (1) では，$\dfrac{1}{x(x^2+1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$ $(A,\ B,\ C$ は定数$)$ のように変形することに注意する。

解答

(1)　$\dfrac{1}{x(x^2+1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$ $(A,\ B,\ C$ は定数$)$ とおく。

両辺に $x(x^2+1)$を掛けると　$1=A(x^2+1)+(Bx+C)x=(A+B)x^2+Cx+A$

これは，x についての恒等式であるので　$\begin{cases}A+B=0\\C=0\\A=1\end{cases}$　　これを解くと　$A=1,\ B=-1,\ C=0$

よって　$\dfrac{1}{x(x^2+1)}=\boldsymbol{\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x^2+1}}$

(2)　$\dfrac{1}{x^3-1}=\dfrac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}$ であるから　$\dfrac{1}{x^3-1}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+x+1}$ $(A,\ B,\ C$ は定数$)$ とおく。

両辺に x^3-1 を掛けると　$1=A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)=Ax^2+Ax+A+Bx^2-Bx+Cx-C$

$=(A+B)x^2+(A-B+C)x+A-C$

これは，x についての恒等式であるので　$\begin{cases}A+B=0 & \cdots\cdots①\\A-B+C=0 & \cdots\cdots②\\A-C=1 & \cdots\cdots③\end{cases}$

①＋②より　$2A+C=0$　……④　　　④＋③より　$3A=1$　　よって　$A=\dfrac{1}{3}$,

①から　$B=-\dfrac{1}{3}$,　③から　$C=-\dfrac{2}{3}$

したがって　$\dfrac{1}{x^3-1}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3(x-1)}-\dfrac{x+2}{3(x^2+x+1)}}$

3　**（分母）＝0 という方程式が重解をもつ場合**

分数式$\dfrac{1}{(x-1)^2(x+2)}$を，部分分数に分解せよ。

要　点

$\dfrac{k}{(x-a)^2(x-b)}$ $\left(k\text{は 2 次以下の多項式または定数，}a\text{，}b\text{ は定数}\right)$ という分数式は，

$\dfrac{k}{(x-a)^2(x-b)}=\dfrac{A}{(x-a)^2}+\dfrac{B}{x-a}+\dfrac{C}{x-b}$ $\left(A\text{，}B\text{，}C\text{ は定数}\right)$ のように変形できる。

確認

まず，2から　$\dfrac{k}{(x-a)^2(x-b)}=\dfrac{px+q}{(x-a)^2}+\dfrac{r}{x-b}$ $\left(p\text{，}q\text{，}r\text{ は定数}\right)$ のように変形できる。

ここで　$\dfrac{px+q}{(x-a)^2}=\dfrac{p(x-a)+ap+q}{(x-a)^2}=\dfrac{p(x-a)}{(x-a)^2}+\dfrac{ap+q}{(x-a)^2}=\dfrac{p}{x-a}+\dfrac{ap+q}{(x-a)^2}$

と変形でき，a，p，q は定数であるので，p，$ap+q$ は定数である。

以上から，$\dfrac{k}{(x-a)^2(x-b)}=\dfrac{A}{(x-a)^2}+\dfrac{B}{x-a}+\dfrac{C}{x-b}$ のように変形できることが確認できた。

解答

$\dfrac{1}{(x-1)^2(x+2)}=\dfrac{A}{(x-1)^2}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x+2}$ $\left(A\text{，}B\text{，}C\text{ は定数}\right)$ とおく。

両辺に$(x-1)^2(x+2)$を掛けると　$1=A(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)^2$

$=Ax+2A+Bx^2+Bx-2B+Cx^2-2Cx+C$

$=(B+C)x^2+(A+B-2C)x+2A-2B+C$

これは，x についての恒等式であるので　$\begin{cases} B+C=0 & \cdots\cdots ① \\ A+B-2C=0 & \cdots\cdots ② \\ 2A-2B+C=1 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$

①×2＋②より　$A+3B=0$　……④，　③－①より　$2A-3B=1$　……⑤

④＋⑤より　$3A=1$　　よって　$A=\dfrac{1}{3}$，　④から　$B=-\dfrac{1}{9}$，　①から　$C=\dfrac{1}{9}$

したがって　$\dfrac{1}{(x-1)^2(x+2)}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3(x-1)^2}}-\boldsymbol{\dfrac{1}{9(x-1)}}+\boldsymbol{\dfrac{1}{9(x+2)}}$