微分法の応用

$\boxed{1}$　**接線と法線**

(1)　次の問いに答えよ。

①　曲線 $y=\log x$ 上の点(1，0)における接線と法線の方程式を求めよ。

②　原点から曲線 $y=\log x$ に引いた接線の方程式を求めよ。

(2)　楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 上の点$\left(\sqrt{3},\ 2\right)$における接線の方程式を求めよ。

(3)　媒介変数 t によって表された曲線 $x=t^2$，$y=t-1$ 上の $t=-1$ に対応する点における接線の方程式を求めよ。

要　点

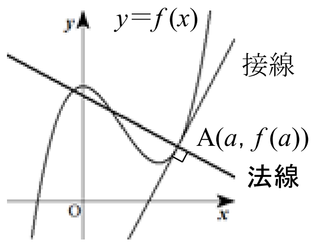
今後，特に断らない限り，「要点」に出てくる関数はすべて微分可能とする。

接線と法線

曲線 $y=f(x)$上の点 A$(a,\ f(a))$を通り，点 A における接線と垂直に交わる直線を，点 A における **法線** という。

接線 A の傾きは$f'(a)$であるから，$f'(a)\neq 0$ のとき，法線の傾きは

$-\dfrac{1}{f'(a)}$である。



接線と法線の方程式

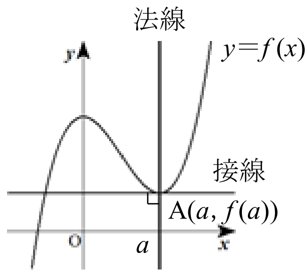
曲線 $y=f(x)$上の点 A$(a,\ f(a))$における接線の方程式は

$$\boldsymbol{y-f(a)=f'(a)(x-a)}$$

また，$f'(a)\neq 0$ のとき，点 A における法線の方程式は

$$\boldsymbol{y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)}$$

$f'(a)=0$ のとき，点 A における法線の方程式は　　$\boldsymbol{x=a}$



(2)，(3)　曲線の方程式が，$F(x,\ y)=0$ や t を媒介変数として $x=f(t)$，$y=g(t)$で表されるとき，

点 A$\left(x_1,\ y_1\right)$における接線の傾きは，導関数$\dfrac{dy}{dx}$に$x=x_1$，$y=y_1$を代入した値である。

解答

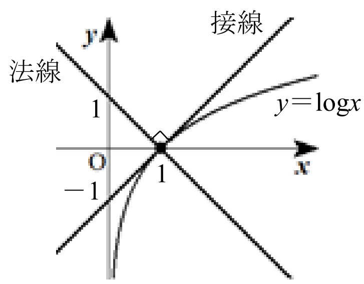
(1)　①　$f(x)=\log x$ とおくと　$f'(x)=\dfrac{1}{x}$，$f'(1)=1$

よって，**接線の方程式**は

$y-0=1(x-1)$　　すなわち　$\boldsymbol{y=x-1}$

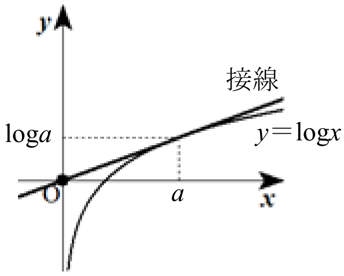
法線の方程式は

$y-0=-\dfrac{1}{1}(x-1)$　　すなわち　$\boldsymbol{y=-x+1}$



② 曲線と，原点から曲線 $y=\log x$ に引いた接線の接点を$(a,\ \log a)$とする。

このとき，接線の傾きは①より $\dfrac{1}{a}$ であるから，接線の方程式は



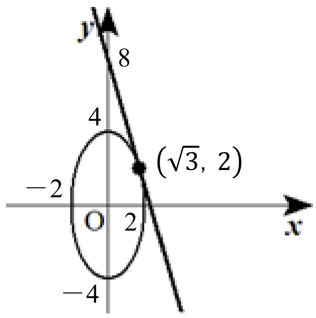
$$y-\log a=\frac{1}{a}(x-a)$$

すなわち　$y=\dfrac{1}{a}x+\log a-1$　……$(*)$

$(*)$は原点を通るので　$0=\log a-1$　　よって　$a=e$

したがって，$(*)$より，求める接線の方程式は　$\boldsymbol{y=\dfrac{1}{e}x}$

(2)　$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1$ の両辺をxについて微分すると　$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{8}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$



$y\neq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{4x}{y}$

点$(\sqrt{3},\ 2)$における接線の傾きは　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{4\sqrt{3}}{2}=-2\sqrt{3}$

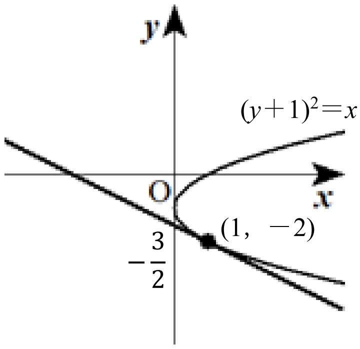
よって，接線の方程式は　$y-2=-2\sqrt{3}(x-\sqrt{3})$

すなわち　$\boldsymbol{y=-2\sqrt{3}x+8}$

(3)　接点は，$t=-1$ に対応する点$(1,\ -2)$である。

$x=t^2=(-1)^2=1$,
$y=t-1=-1-1=-2$

また，$\dfrac{dx}{dt}=2t$，$\dfrac{dy}{dt}=1$ であるから　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{1}{2t}$



$t=-1$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2\cdot(-1)}=-\dfrac{1}{2}$

したがって，接線の方程式は　$y-(-2)=-\dfrac{1}{2}(x-1)$

すなわち　$\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}}$

2　平均値の定理

平均値の定理を用いて，次の不等式を証明せよ。

$x>1$ のとき　$x\log x<x^2-x<x^2\log x$

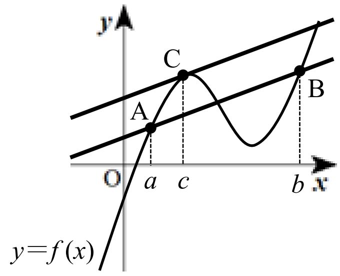
要　点

平均値の定理

関数 $f(x)$が閉区間$[a,\ b]$で連続，開区間$(a,\ b)$で微分可能ならば

$$\boldsymbol{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c),\quad a<c<b}$$

を満たす c が少なくとも 1 つ存在する。



〈注意〉関数 $f(x)$が閉区間$[a,\ b]$で連続であるが，

開区間$(a,\ b)$で微分可能でないならば，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c),\quad a<c<b$$

を満たす c が存在するとは限らない。

曲線 $y=f(x)$上の点 A$(a,\ f(a))$と B$(b,\ f(b))$を結ぶ

直線 AB の傾きは $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，

区間$(a,\ b)$に直線 AB の傾きと等しい接線の傾き

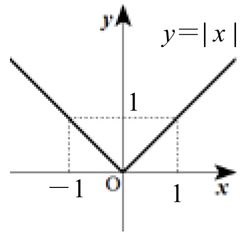
$f'(c)$となる点 C が少なくとも 1 つ存在する。

例えば，$x=0$ で微分可能でない $f(x)=|x|$の

閉区間$[-1,\ 1]$について考えると，

$\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=0$ であるが　$f'(c)=0$，

$-1<c<1$ を満たす c は存在しない。



証明

関数$f(x)=\log x$は$x>1$ で微分可能で　$f'(x)=\dfrac{1}{x}$

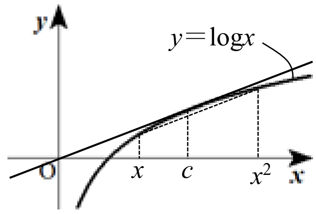
$x>1$ のとき $x^2>x$ であるから，区間$[x,\ x^2]$において平均値の定理により

$$\frac{\log x^2-\log x}{x^2-x}=\frac{1}{c},\quad x<c<x^2$$

を満たす c が存在する。ここで，$\log x^2-\log x=2\log x-\log x=\log x$ である

から　$\dfrac{x^2-x}{\log x}=c,\quad x<c<x^2$　　よって　$x<\dfrac{x^2-x}{\log x}<x^2$

$x>1$ のとき，$\log x>0$ であるから　$x\log x<x^2-x<x^2\log x$



$\boxed{3}$　関数の増減と極大・極小

(1)　$f(x)=x-\sqrt{x}$の増減を調べよ。

(2)　次の関数の極値を求めよ。

①　$f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$　　　　②　$f(x)=|x|e^x$

(3)　関数$f(x)=\dfrac{2x-a}{x^2+2}$が$x=-1$ で極値をとるとき，定数aの値を求めよ。

また，このときの関数 $f(x)$の極値を求めよ。

要　点

関数の増減

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続，開区間 $(a,\ b)$ で微分可能であるとき，平均値の定理から次が成り立つ。

$\boxed{1}$　**区間 $(a,\ b)$ でつねに $f'(x)>0$ ならば，$f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で増加する。**

$\boxed{2}$　**区間 $(a,\ b)$ でつねに $f'(x)<0$ ならば，$f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で減少する。**

$\boxed{3}$　**区間 $(a,\ b)$ でつねに $f'(x)=0$ ならば，$f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で定数である。**

証明

区間 $[a,\ b]$ において，$x_1<x_2$ を満たす任意の 2 つの数 x_1，x_2 をとれば，平均値の定理により

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c),\qquad x_1<c<x_2$$

を満たす c が存在する。

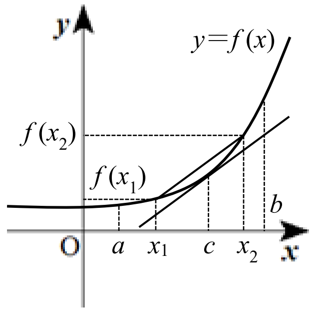
$\boxed{1}$ の仮定より　$f'(c)>0$

また，$x_2-x_1>0$

であるから　$f(x_2)-f(x_1)>0$

すなわち　$f(x_1)<f(x_2)$

したがって，$f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で増加する。



$\boxed{2}$ の仮定より　$f'(c)<0$

また，$x_2-x_1>0$

であるから　$f(x_2)-f(x_1)<0$

すなわち　$f(x_1)>f(x_2)$

したがって，$f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で減少する。

$\boxed{3}$ の仮定より　$f'(c)=0$

また，$x_2-x_1>0$

であるから　$f(x_2)-f(x_1)=0$

すなわち　$f(x_1)=f(x_2)$

したがって，$f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で定数である。

関数の極大・極小

連続な関数 $f(x)$ が，$x=a$ の前後で

増加から減少に変わるとき，

$f(x)$ は $x=a$ で **極大** であるといい，

$f(a)$ を **極大値** という。

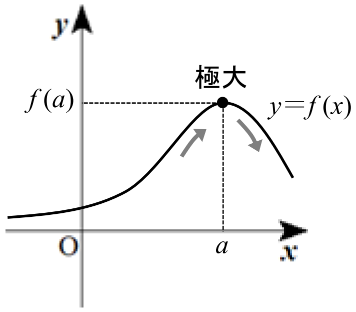
また，$f(x)$ が，$x=a$ の前後で

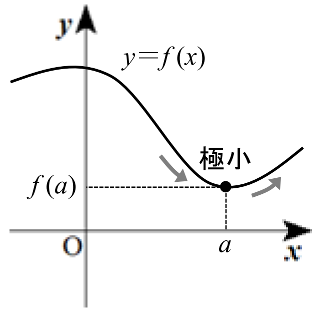
減少から増加に変わるとき，

$f(x)$ は $x=a$ で **極小** であるといい，

$f(a)$ を **極小値** という。

極大値と極小値を合わせて **極値** という。

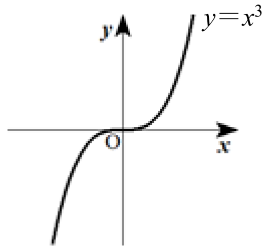




$f(x)$が $x=a$ を含む区間で微分可能で，$f'(x)$の符号が $x=a$ の前後で変化するとき，$f(x)$は $x=a$ で極値をとる。よって，関数 $f(x)$が極値をとるための必要条件として，次のことが成り立つ。

微分可能な関数 $f(x)$が $x=a$ で極値をとるならば　$f'(a)=0$

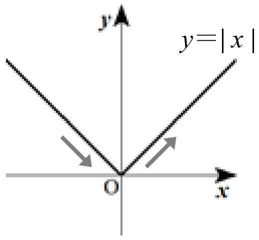
しかし，この逆は成り立たない。
例えば，$f(x)=x^3$ のとき，
$f'(x)=3x^2$ より $f'(0)=0$ であるが
$x=0$ の前後で $f'(x)$の符号は
変わらないから，$f(0)$は極値ではない。



以上から，微分可能な関数 $f(x)$の極値を調べるには，まず $f'(x)=0$ となる x の値 a を求め，$x=a$ の前後の $f'(x)$の符号を調べればよい。

$f'(x)$の符号が $x=a$ の前後で**正から負**に変われば，$f(a)$は**極大値**であり，
$f'(x)$の符号が $x=a$ の前後で**負から正**に変われば，$f(a)$は**極小値**である。

関数 $f(x)$が $x=a$ で微分可能でない場合でも，$f(a)$が極値になることがある。
例えば，関数 $f(x)=|x|$ は，
$x=0$ で微分可能でない。
ところが，$f(x)$は $x=0$ の前後で
減少から増加に変わるから，
$f(0)=0$ は極小値である。



解答

(1)　関数 $f(x)$の定義域は，$x \geqq 0$ である。

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$$

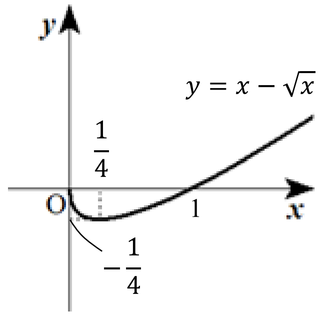
$f'(x) = 0$ とすると，$\sqrt{x} = \frac{1}{2}$ より　$x = \frac{1}{4}$

よって，$f(x)$の増減表は右のようになる。
したがって，$f(x)$は

$$\mathbf{0 \leqq x \leqq \frac{1}{4}}\ \textbf{で減少し，}$$

$$\mathbf{x \geqq \frac{1}{4}}\ \textbf{で増加する。}$$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗

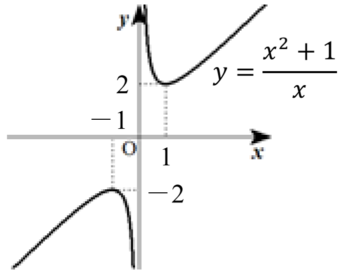


(2)　①　関数 $f(x)$ の定義域は，$x\neq0$ である。

$$f'(x)=\frac{2x\cdot x-(x^2+1)\cdot 1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}=\frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-1,\ 1$　　よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	＼	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	-2	↘	＼	↘	2	↗



したがって，$f(x)$ は　　**$x=-1$ で極大値 -2,**

$x=1$ で極小値 2　をとる。

②　(ｉ)　$x\geqq0$ のとき，$f(x)=xe^x$ であるから　$f'(x)=e^x+x\cdot e^x=(1+x)e^x$

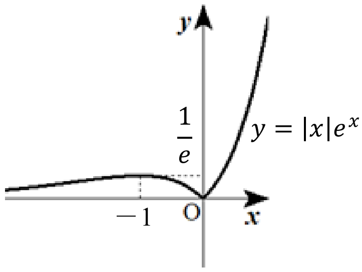
$x\geqq0$ のとき，つねに $f'(x)>0$ である。

(ii)　$x<0$ のとき，$f(x)=-xe^x$ であるから　$f'(x)=-e^x+(-x)\cdot e^x=(-1-x)e^x$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-1$

以上から，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	＼	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0	↗



したがって，$f(x)$ は　　**$x=-1$ で極大値 $\frac{1}{e}$，$x=0$ で極小値 0**　をとる。

〈注意〉関数 $f(x)=|x|e^x$ は $x=0$ で微分可能ではない。

このことは，$\lim_{x\to+0}f'(x)\neq\lim_{x\to-0}f'(x)$ となることを確かめればよい。

(3)　　$$f'(x)=\frac{2\cdot(x^2+2)-(2x-a)\cdot 2x}{(x^2+2)^2}=\frac{-2x^2+2ax+4}{(x^2+2)^2}$$

$f(x)$ は $x=-1$ で微分可能であるから，$f(x)$ が $x=-1$ で極値をとるならば　$f'(-1)=0$

すなわち　$\frac{-2-2a+4}{9}=0$　　これを解くと　$a=1$

このとき　$f(x)=\frac{2x-1}{x^2+2}$，　$f'(x)=\frac{-2x^2+2x+4}{(x^2+2)^2}=\frac{-2(x+1)(x-2)}{(x^2+2)^2}$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-1,\ 2$　　よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-1	↗	$\frac{1}{2}$	↘

したがって，$x=-1$ で極小値をとるので，条件を満たす。

以上から　　**$a=1$**

$x=-1$ で極小値 -1,

$x=2$ で極大値 $\frac{1}{2}$　をとる。

$f'(-1)=0$ であっても，$x=-1$ で極値をとらない場合があるので，$x=-1$ の前後で $f'(x)$ の符号が変わることを増減表で確かめる。

4　曲線の凹凸と関数のグラフ

(1)　曲線$y=\dfrac{x+1}{x^2}$のグラフをかけ。また，変曲点があれば求めよ。

(2)　関数$f(x)=3x^4-4x^3$の極値を求めよ。

(3)　曲線$y=\dfrac{x^2}{x+1}$の漸近線を求めよ。

要　点

関数$y=f(x)$のグラフをかくときの留意点

①定義域　……　まず，グラフがどの範囲に存在するか確認する。

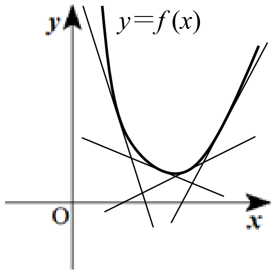
②増減と極値　……　$f'(x)$の符号の変化を調べる。

③凹凸と変曲点　……　第 2 次導関数$f''(x)$の符号の変化を調べる。

曲線の凹凸

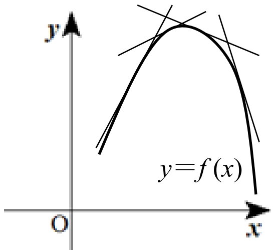
曲線$y=f(x)$において，

・$f''(x)>0$の区間では，曲線$y=f(x)$上の点$(x,\ f(x))$における接線の傾き$f'(x)$は増加している。
このとき，曲線$y=f(x)$はこの区間で **下に凸** であるという。



xの値が増加するにつれて，接線の傾きも増加する。

・$f''(x)<0$の区間では，接線の傾き$f'(x)$は減少している。
このとき，曲線$y=f(x)$はこの区間で **上に凸** であるという。

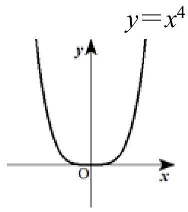


xの値が増加するにつれて，接線の傾きは減少する。

変曲点

・凹凸が変わる曲線上の点。すなわち，曲線$y=f(x)$において，$f''(a)=0$であって$x=a$の前後で$f''(a)$の符号が変わるなら，点$(a,\ f(a))$は曲線$y=f(x)$の **変曲点** である。

・曲線$y=f(x)$において，点$(a,\ f(a))$が変曲点ならば，$f''(x)=0$である。
しかし，$f''(x)=0$であっても変曲点であるとは限らない。実際，曲線$f(x)=x^4$において，$f''(0)=0$であるが，$x=0$の前後で$f''(x)$の符号が変わらないから，点$(0,\ 0)$は変曲点ではない。



$y'=4x^3$

$y''=12x^2$

x	…	0	…
y''	＋	0	＋
y	下に凸	0	下に凸

④座標軸との共有点　……　$x=0$のときのyの値や，$y=0$のときのxの値を調べる。

⑤定義域の境界　……　例えば定義域が実数全体であれば，$x\longrightarrow\pm\infty$のときの$y$の極限など，定義域の境界について調べる。

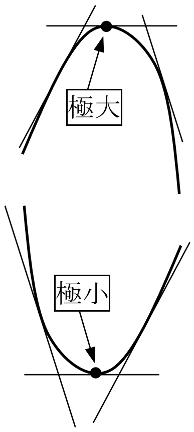
第 2 次導関数と極値

関数 $y=f(x)$において，$x=a$ を含むある区間で

第 2 次導関数 $f''(x)$は連続であるとする。

[1] **$f'(a)=0$，$f''(a)<0$ ならば，**
$f(a)$は極大値である。

[2] **$f'(a)=0$，$f''(a)>0$ ならば，**
$f(a)$は極小値である。



$f'(a)=0$，$f''(a)<0$
x の値が増加するにつれて，
接線の傾きは減少する。

$f'(a)=0$，$f''(a)>0$
x の値が増加するにつれて，
接線の傾きも増加する。

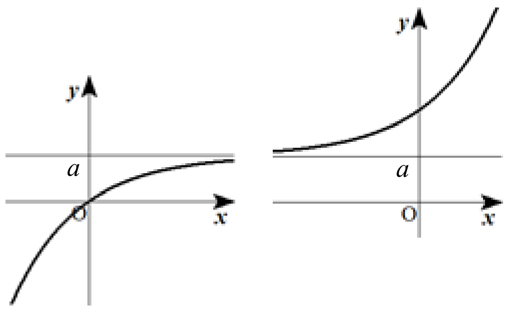
漸近線

一般に，曲線 $y=f(x)$に関して，次のことが成り立つ。

[1] **x 軸に平行な漸近線**

$\lim_{x\to\infty} f(x) = a$または $\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$が成り立つとき，

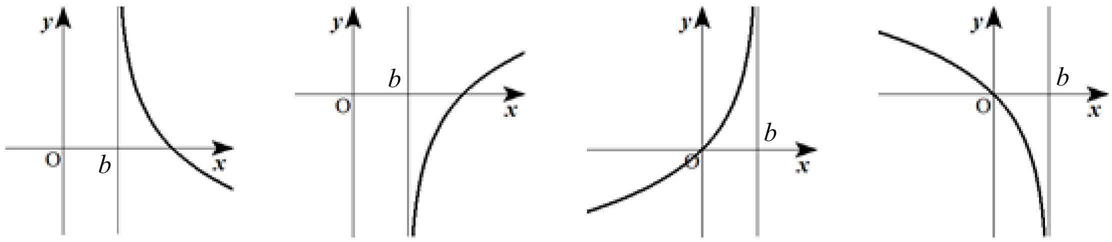
直線 $y=a$ は漸近線となる。



[2] **x 軸に垂直な漸近線**

$\lim_{x\to b+0} f(x) = \infty$または $\lim_{x\to b+0} f(x) = -\infty$

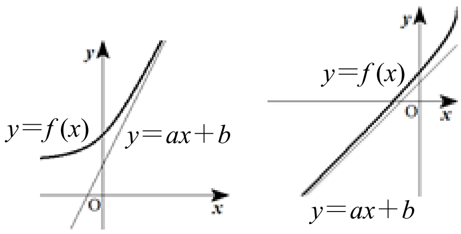
または $\lim_{x\to b-0} f(x) = \infty$または $\lim_{x\to b-0} f(x) = -\infty$が成り立つとき，直線$x = b$は漸近線となる。



[3] **x 軸に平行でも垂直でもない漸近線**

$\lim_{x\to\infty}\{f(x) - (ax + b)\} = 0$ または $\lim_{x\to-\infty}\{f(x) - (ax + b)\} = 0$

が成り立つとき，直線 $y=ax+b$ は漸近線となる。



[3]において，$\lim_{x\to\infty}\{f(x) - (ax + b)\} = 0$ が成り立つとき，a，bは，

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x},\quad b = \lim_{x\to\infty}\{f(x) - ax\}$$

を計算することにより求められる。

〈注意〉$x\longrightarrow-\infty$の場合も同様に求められる。

解答

(1)　定義域は $x \neq 0$ である。y'，y''を計算すると，次のようになる。

$$y' = \left(\frac{x+1}{x^2}\right)' = \frac{1 \cdot x^2 - (x+1) \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{-x^2 - 2x}{x^4} = -\frac{x+2}{x^3},$$

$$y'' = \left(-\frac{x+2}{x^3}\right)' = -\frac{1 \cdot x^3 - (x+2) \cdot 3x^2}{(x^3)^2} = -\frac{-2x^3 - 6x^2}{x^6} = \frac{2x+6}{x^4}$$

$y'=0$ とすると $x=-2$，　$y''=0$ とすると $x=-3$　　よって，y の増減と凹凸は次の表のようになる。

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$		$-$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$		$+$
y	⤵	$-\frac{2}{9}$	⤷	$-\frac{1}{4}$	⤴		⤷

矢印の意味は，次のとおり。

⤵ …上に凸で減少

⤷ …下に凸で減少

↱ …上に凸で増加

⤴ …下に凸で増加

ここで，$\lim_{x\to\infty} y = 0$，　$\lim_{x\to-\infty} y = 0$ より，x軸は漸近線である。

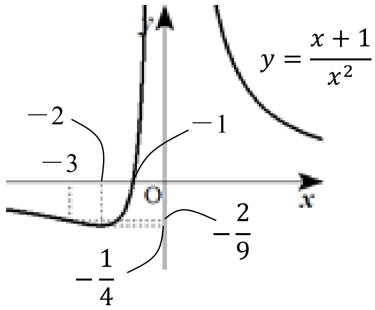
また，$\lim_{x\to-0} y = \infty$，　$\lim_{x\to+0} y = \infty$より，y軸も漸近線である。

以上のことから，グラフは右の図のようになる。

また，変曲点は　**点$\left(-3,\ -\frac{2}{9}\right)$**

$y=0$ のとき

$x=-1$



(2)　$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=0,\ 1$

また，$f''(x) = (12x^3 - 12x^2)' = 36x^2 - 24x = 12x(3x-2)$であるから　　$f''(0)=0$，　$f''(1) = 12 > 0$

よって，$x=1$ で極小となり，**極小値は**　$f(1) = 3 - 4 = \mathbf{-1}$

(3)　(ⅰ)　$\lim_{x\to\pm\infty} y$ は極限値をもたないから，x軸に平行な漸近線はない。

(ⅱ)　$\lim_{x\to-1+0} y = \infty$，　$\lim_{x\to-1-0} y = -\infty$であるから，直線$x = -1$ は漸近線となる。

(ⅲ)　$\lim_{x\to\infty}\{f(x) - (ax+b)\} = 0$ を満たすa，bが存在するとして，

$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$，$b = \lim_{x\to\infty}\{f(x) - ax\}$ とする。　　$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$，

$$b = \lim_{x\to\infty}\{f(x) - ax\} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x(x+1)}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{1+\frac{1}{x}} = -1$$

$\lim_{x\to-\infty}\{f(x) - (ax+b)\} = 0$ を満たすa，bも，$a = 1$，$b = -1$ である。

よって，直線 $y=x-1$ は漸近線となる。

以上から，漸近線は　**直線 $x=-1$，　$y=x-1$**

5　媒介変数で表された関数の最大・最小

x の関数 y が，θ を媒介変数として　$x=\theta-\sin\theta$，$y=1-\cos\theta$ で表されるとき，$0\leqq\theta\leqq 2\pi$ における最大値，最小値を求めよ。

要　点

媒介変数 θ の値に対する x，y それぞれの値の増減を調べる。
点$(x,\ y)$の動きからグラフの概形をかき，最大値，最小値を求める。

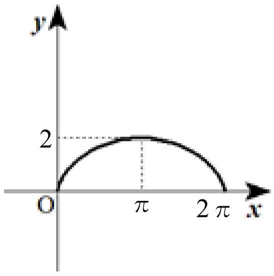
解答

$\dfrac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta$，　$\dfrac{dy}{d\theta}=\sin\theta$　　$\dfrac{dx}{d\theta}=0$ とすると $\theta=0,\ 2\pi$，　$\dfrac{dy}{d\theta}=0$ とすると $\theta=0,\ \pi,\ 2\pi$

よって，$0\leqq\theta\leqq 2\pi$ における θ の値の変化に対応した x，y の値の変化は次の表のようになる。

θ	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$\dfrac{dx}{d\theta}$	0	＋	＋	＋	0
x	0	→	π	→	2π
$\dfrac{dy}{d\theta}$	0	＋	0	－	0
y	0	↑	2	↓	0

表中の→は x の値が増加することを意味する。
また，↑，↓はそれぞれ y の値が増加，減少することを意味する。



よって，グラフの概形は右のようになる。
したがって，　**$x=0,\ 2\pi$ のとき最小値 0，**
$x=\pi$ のとき最大値 2　をとる。

6　方程式・不等式への応用

$x>0$ のとき，不等式 $\log x\leqq x-1$ が成り立つことを証明せよ。

要　点

$f(x)=$（左辺）－（右辺）とおき，関数 $f(x)$の増減を調べることにより，不等式を証明する。

証明

$f(x)=\log x-(x-1)$とおくと　$f'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$

$f'(x)=0$ とすると　$x=1$　　よって，$f(x)$の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	＼	＋	0	－
$f(x)$	＼	↗	0	↘

関数 $f(x)$は，$x=1$ のとき最大値 0 をとるから　$f(x)\leqq 0$　$(x>0)$
したがって，$x>0$ のとき　$\log x\leqq x-1$　　等号が成り立つのは，$x=1$ のときである。

7　速度・加速度

(1)　次の問いに答えよ。

①　数直線上の動点 P の座標 x が，時刻 t の関数として　$x=10-4t+t^3$　と表されるとき，点 P の時刻 t における速度 v，および加速度 α を求めよ。

②　座標平面上を運動する点 P の座標が，時刻 t の関数として次の式で表されるとする。

$$x=\frac{\cos t}{t},\quad y=\frac{\sin t}{t}$$

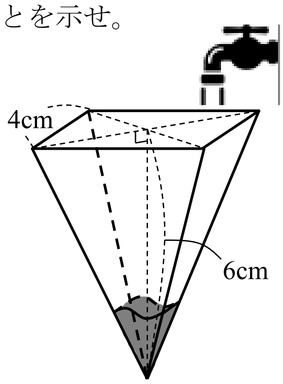
このとき，$t=1$ における点 P の速さを求めよ。

(2)　次の問いに答えよ。

①　原点 O のまわりを，長さ r の線分 OP が 1 秒間に角 ω の割合で回転するように等速円運動をしている。点 P が点$(r,\ 0)$を出発してから t 秒後の座標を$(x,\ y)$とするとき，点 P の時刻 t における速さと加速度の大きさを求めよ。ただし，$r>0$，$\omega>0$ とする。

②　点 P の時刻 t における速度ベクトルと加速度ベクトルは垂直 であることを示せ。

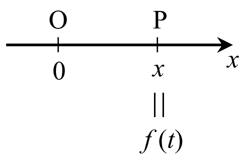
(3)　底面の 1 辺が 4cm，高さが 6cm の正四角錐状の容器を逆さまにおく。この容器に 1cm³/s の割合で水を注ぐ。水の深さが 3cm になる瞬間において，水面の上昇する速さを求めよ。



要　点

直線上の運動

数直線上を運動する点 P があるとき，時刻 t における点 P の位置 x が，$x=f(t)$で表せるとする。



tの増分Δtに対するxの平均変化率は　$\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\dfrac{f(t+\Delta t)-f(x)}{\Delta t}$　となる。

このとき，極限値 $\displaystyle\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(x)}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}=f'(t)$を，時刻$t$における点 P の **速度** という。

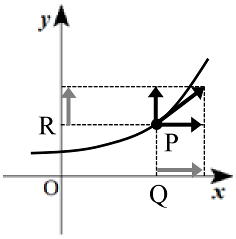
点 P の速度をvとすると　　$\boldsymbol{v=\dfrac{dx}{dt}=f'(t)}$

また，$\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d^2x}{dt^2}=f''(t)$は，速度$v$の時刻$t$における変化率を表し，時刻$t$における点 P の**加速度**という。

点 P の加速度を α とすると　　$\boldsymbol{\alpha=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d^2x}{dt^2}=f''(t)}$

速度 v，加速度 α に対し，$|\boldsymbol{v}|$ を **速さ**，$|\ \boldsymbol{\alpha}\ |$ を **加速度の大きさ** という。

平面上の運動



座標平面上を運動する点 P があるとき，
時刻 t における点 P の座標$(x,\ y)$が，
$x=f(t)$，$y=g(t)$で表せるとする。
このとき，点 P から x 軸，y 軸に垂線 PQ，PR
を引くと，点 P の運動にともなって点 Q は x 軸上，点 R は y 軸上を運動する。

点 Q，R の時刻tにおける速度はそれぞれ$\dfrac{dx}{dt}$，$\dfrac{dy}{dt}$で表され，これらを成分とするベクトル

$\boldsymbol{\vec{v}}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ を，時刻tにおける点 P の **速度**，または **速度ベクトル** という。

〈注意〉 $\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{dy}{dx}$から，$\vec{v}$の方向は点 P のえがく曲線上の点 P における接線の方向と一致する。

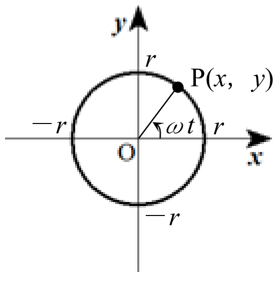
また，点 Q，R の時刻tにおける加速度はそれぞれ$\dfrac{d^2x}{dt^2}$，$\dfrac{d^2y}{dt^2}$で表され，これらを成分とするベクトル

$\boldsymbol{\vec{\alpha}}=\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$ を，時刻tにおける点 P の **加速度**，または **加速度ベクトル** という。

$|\vec{v}|=\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}$ を **速さ**，または **速度の大きさ** という。

$|\vec{\alpha}|=\sqrt{\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$ を **加速度の大きさ** という。

等速円運動



原点 O のまわりを，点$(r,\ 0)$を出発して長さ r の線分 OP
が 1 秒間に角 ω の割合で回転するとき，t 秒後の線分 OP
と x 軸とのなす角は ωt であるから，点 P の座標$(x,\ y)$は
t を媒介変数として

$\boldsymbol{x=r\cos\omega t,}$

$\boldsymbol{y=r\sin\omega t}$

と表すことができる。

(3)　時刻tにおける水の体積をVとすると，$\dfrac{dV}{dt}=1$ である。このとき，水の深さ h はtの関数であり，

水の深さが 3cm になる瞬間における$\left|\dfrac{dh}{dt}\right|$を求めればよい。

解答

(1)　①　$\boldsymbol{v=\dfrac{dx}{dt}=-4+3t^2,\quad \alpha=\dfrac{dv}{dt}=6t}$

②　$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{-\sin t\cdot t-\cos t\cdot 1}{t^2}=\dfrac{-t\sin t-\cos t}{t^2},\quad \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{\cos t\cdot t-\sin t\cdot 1}{t^2}=\dfrac{t\cos t-\sin t}{t^2}$

点 P の速さを$|\vec{v}|$とすると

$$|\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\frac{t^2\sin^2 t+2t\sin t\cos t+\cos^2 t}{t^4}+\frac{t^2\cos^2 t-2t\cos t\sin t+\sin^2 t}{t^4}}$$

$$=\sqrt{\frac{t^2(\sin^2 t+\cos^2 t)+(\cos^2 t+\sin^2 t)}{t^4}}=\sqrt{\frac{t^2+1}{t^4}}$$

よって，$t=1$ における点 P の速さ$|\vec{v}|$は　$\boldsymbol{|\vec{v}|=\sqrt{\dfrac{1^2+1}{1^4}}=\sqrt{2}}$

(2)　①　点 P の座標$(x,\ y)$は，t を媒介変数として　$x=r\cos\omega t$，$y=r\sin\omega t$　と表すことができる。

このとき，　$\dfrac{dx}{dt}=-r\omega\sin\omega t$，　$\dfrac{dy}{dt}=r\omega\cos\omega t$，　$\dfrac{d^2x}{dt^2}=-r\omega^2\cos\omega t$，　$\dfrac{d^2y}{dt^2}=-r\omega^2\sin\omega t$

であるから，点 P の時刻tにおける速度$\vec{v}$，加速度$\vec{\alpha}$とすると

$$\vec{v}=(-r\omega\sin\omega t,\ r\omega\cos\omega t),\quad \vec{\alpha}=(-r\omega^2\cos\omega t,\ -r\omega^2\sin\omega t)$$

よって，点 P の時刻tにおける速さ$|\vec{v}|$，加速度の大きさ$|\vec{\alpha}|$は

$$|\vec{v}|=\sqrt{(-r\omega\sin\omega t)^2+(r\omega\cos\omega t)^2}=\sqrt{(r\omega)^2(\sin^2\omega t+\cos^2\omega t)}=\boldsymbol{r\omega}$$

$$|\vec{\alpha}|=\sqrt{(-r\omega^2\cos\omega t)^2+(-r\omega^2\sin\omega t)^2}=\sqrt{(r\omega^2)^2(\cos^2\omega t+\sin^2\omega t)}=\boldsymbol{r\omega^2}$$

②　①より，速度ベクトル$\vec{v}$，加速度ベクトル$\vec{\alpha}$は

$$\vec{v}=(-r\omega\sin\omega t,\ r\omega\cos\omega t),\quad \vec{\alpha}=(-r\omega^2\cos\omega t,\ -r\omega^2\sin\omega t)$$

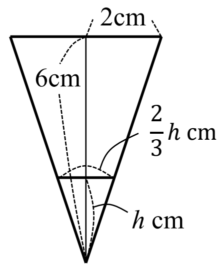
であるから　$\vec{v}\cdot\vec{\alpha}=(-r\omega\sin\omega t)\cdot(-r\omega^2\cos\omega t)+r\omega\cos\omega t\cdot(-r\omega^2\sin\omega t)$

$=r^2\omega^3\sin\omega t\cos\omega t-r^2\omega^3\cos\omega t\sin\omega t=0$

$r>0$，$\omega>0$ であり，$\sin\omega t$ と $\cos\omega t$ は同時に 0 にはならないから　$\vec{v}\neq\vec{0}$，$\vec{\alpha}\neq\vec{0}$

よって　$\vec{v}\perp\vec{\alpha}$

(3)　水の深さが $h$cm のとき，底面の正方形の 1 辺の長さは$\dfrac{2}{3}h$cm である。



このとき，水の体積Vは　$V=\left(\dfrac{2}{3}h\right)^2\times h\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{27}h^3$

h，Vは時刻tの関数であるから，$V=\dfrac{4}{27}h^3$の両辺をtで微分すると　$\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{4}{9}h^2\dfrac{dh}{dt}$

$\dfrac{dV}{dt}=1$ であり，$h=3$ における$\left|\dfrac{dh}{dt}\right|$が求める速さであるから

$$\left|\frac{dh}{dt}\right|=1\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{3^2}=\frac{1}{4}\qquad よって\quad \boldsymbol{\frac{1}{4}\ \mathrm{cm/s}}$$

8　近似式

次の問いに答えよ。

(1)　x が 0 に十分近いとき，次の式の 1 次の近似式を作れ。

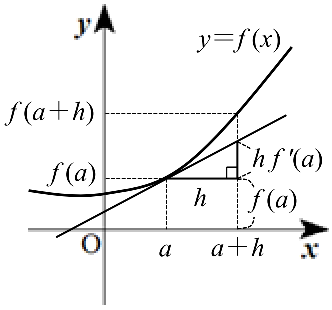
　①　$\sqrt{1+x}$　　　　　　　　　　②　$\sin x$

(2)　次の数の近似値を求めよ。

　①　$\sqrt{1.01}$　　　　　　　　　　②　$\sin 1°$

要　点

1 次の近似式



関数 $y=f(x)$が $x=a$ で微分可能であるとき，微分係数 $f'(a)$は

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

ここで，h が 0 に十分近いとき　　$f'(a) \fallingdotseq \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

と近似できる。すなわち　　$f(a+h) \fallingdotseq f(a)+hf'(a)$

$a=0$，$h=x$ とおけば，x が 0 に十分近いときの次の近似式が成り立つ。　　$\boldsymbol{f(x) \fallingdotseq f(0)+f'(0)x}$

これを関数 $y=f(x)$の **1 次の近似式** という。

(2)　①　$\sqrt{1.01}=\sqrt{1+0.01}$であり，0.01 は 0 に十分近いと考えて，$\sqrt{1+x}$の 1 次の近似式に $x=0.01$ を代入すればよい。

　②　1° を弧度法で表すと $\dfrac{\pi}{180}$ である。$\dfrac{\pi}{180}$ は 0 に十分近いと考えて，$\cos x$ の 1 次の近似式に $x=\dfrac{\pi}{180}$ を代入すればよい。

解答

(1)　①　$f(x)=\sqrt{1+x}$とおくと，$f'(x)=\dfrac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$であるから　$f(0)=1$，$f'(0)=\dfrac{1}{2}$

　　したがって，xが 0 に十分近いとき　$\sqrt{1+x} \fallingdotseq \boldsymbol{1+\frac{1}{2}x}$

　②　$f(x)=\sin x$ とおくと　$f'(x)=\cos x$ であるから　$f(0)=0$，$f'(0)=1$

　　したがって，x が 0 に十分近いとき　$\sin x \fallingdotseq \boldsymbol{x}$

(2)　①　(1) ①より，xが 0 に十分近いとき　$\sqrt{1+x} \fallingdotseq 1+\dfrac{1}{2}x$

　　0.01 は 0 に十分近いので　$\sqrt{1.01}=\sqrt{1+0.01} \fallingdotseq 1+\dfrac{1}{2}\times 0.01=\mathbf{1.005}$

　②　(1) ②より，x が 0 に十分近いとき　$\sin x \fallingdotseq x$

　　1° を弧度法で表すと $\dfrac{\pi}{180}$ であり，$\dfrac{\pi}{180}$ は 0 に十分近いので　$\sin 1°=\sin\dfrac{\pi}{180} \fallingdotseq \boldsymbol{\dfrac{\pi}{180}}$