微分法（導関数の計算）

1　微分係数

(1)　関数$f(x)=\dfrac{2}{x}$の，$x=1$における微分係数を求めよ。

(2)　関数$f(x)=|x-1|$について，次の問いに答えよ。

①　$x=1$において連続かどうかを調べよ。

②　$x=1$において微分可能かどうかを調べよ。

要　点

微分係数と微分可能

数学Ⅱで学んだように，関数$f(x)$の$x=a$における微分係数$f'(a)$は次のように表される。

$$\boldsymbol{f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

ここで，$a+h=x$とおくと，$h=x-a$であり，$h\longrightarrow 0$のとき$x\longrightarrow a$であるから，微分係数$f'(a)$は次のようにも表される。

$$\boldsymbol{f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

関数$f(x)$について，$x=a$における微分係数$f'(a)$が存在するとき，$f(x)$は$x=a$で **微分可能** であるという。
また，関数$f(x)$がある区間のすべてのxの値に対して微分可能であるとき，$f(x)$はその **区間で微分可能** であるという。

微分可能と連続

数学Ⅲ「極限」で学んだように，関数$f(x)$において，その定義域内の$x=a$に対して，

極限値$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)$が存在し，$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

が成り立つとき，$f(x)$は$x=a$で **連続** であるという。

連続の定義は，「極限値$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)$が存在し，$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$が成り立つ。」であるが，次のように言い換えることもできる。

「$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{x\to a+0}f(x)=\lim_{x\to a-0}f(x)=f(a)}$」

関数$f(x)$について，$x=a$における微分可能の定義は，

「微分係数$f'(a)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$が存在する。」であるが，連続と同様に次のように言い換えることもできる。

「$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{h\to +0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)}$」

微分可能と連続について，次のことが成り立つ。

関数 $f(x)$が $x=a$ で微分可能ならば，$f(x)$は $x=a$ で連続である。

証明　関数 $f(x)$が $x=a$ で微分可能ならば，$f'(a)$が存在して

$$\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\}=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)\right\}=f'(a)\cdot 0=0$$

よって　$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$　　これより，関数$f(x)$は$x=a$で連続である。

解答

(1)　$$\boldsymbol{f'(1)}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2}{1+h}-\frac{2}{1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2-2(1+h)}{1+h}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-2h}{1+h}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2}{1+h}=\boldsymbol{-2}$$

(2)　①　$\lim_{x\to 1+0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}(x-1)=0$,　　$\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1-0}\{-(x-1)\}=0$

また，$f(1)=0$ であるから，$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$が成り立つ。

よって，関数 $f(x)$は $x=1$ において **連続である。**

②　$$\lim_{h\to +0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{|h|-0}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{h}{h}=1,$$

$$\lim_{h\to -0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{|h|-0}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{-h}{h}=-1$$

であるから，$f'(1)$は存在しない。よって，関数 $f(x)$は $x=1$ において **微分可能ではない。**

(2) ①，②からわかるように，「関数 $f(x)$が $x=a$ で微分可能ならば，$f(x)$は $x=a$ で連続である。」の逆「関数 $f(x)$が $x=a$ で連続ならば，$f(x)$は $x=a$ で微分可能である。」は，一般には成り立たない。

2　**導関数**

次の関数を，導関数の定義に従って微分せよ。

(1)　$y=\dfrac{2}{x}$　　　(2)　$y=\sqrt{2x}$

要　点

関数 $f(x)$がある区間で微分可能であるとき，その区間の x の値 a に微分係数 $f'(a)$を対応させる関数を，$f(x)$の **導関数** といい，$\boldsymbol{f'(x)}$ で表す。関数 $f(x)$からその導関数 $f'(x)$を求めることを，$f(x)$を **微分する** という。関数$f(x)$の導関数$f'(x)$は，次の式で定義される。

$$\boldsymbol{f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

関数$y=f(x)$の導関数$f'(x)$は，右のように表すこともある。　$\boldsymbol{y'}$,　$\{\boldsymbol{f(x)}\}'$,　$\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx}}$,　$\boldsymbol{\dfrac{d}{dx}f(x)}$

解答

(1)　$\boldsymbol{y'}=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{2}{x+h}-\dfrac{2}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{2x-2(x+h)}{x(x+h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{-2h}{x(x+h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{-2}{x(x+h)}=-\boldsymbol{\dfrac{2}{x^2}}$

(2)　$\boldsymbol{y'}=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{2(x+h)}-\sqrt{2x}}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{2(x+h)}-\sqrt{2x}\right)\left(\sqrt{2(x+h)}+\sqrt{2x}\right)}{h\left(\sqrt{2(x+h)}+\sqrt{2x}\right)}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{2(x+h)-2x}{h\left(\sqrt{2(x+h)}+\sqrt{2x}\right)}=\lim_{h\to 0}\dfrac{2}{\sqrt{2(x+h)}+\sqrt{2x}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{2x}}}$

3　**積・商の導関数**

(1)　関数 $y=(x+3)(2x^2-1)$を微分せよ。

(2)　次の関数を微分せよ。

①　$y=\dfrac{1}{x+1}$　　②　$y=\dfrac{2}{x}$　　③　$y=\dfrac{2x}{x^2-1}$

要　点

x^n（n は正の整数），定数，和・差の導関数の性質

数学Ⅱで学んだように，x^n（n は正の整数）と定数 c の導関数について，次の公式が成り立つ。

・n が正の整数のとき　$(x^n)'=nx^{n-1}$　　**・c が定数のとき　$(c)'=0$**

関数 $f(x)$，$g(x)$が微分可能であるとき，次の公式が成り立つ。

・$\{kf(x)\}'=kf'(x)$

・$\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$,　$\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$

・$\{kf(x)+lg(x)\}'=kf'(x)+lg'(x)$

導関数の定義に戻り，極限値の性質を用いれば証明できる。

積の導関数

関数 $f(x)$，$g(x)$が微分可能であるとき，次の公式が成り立つ。

・$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$　（まえ微分 うしろそのまま　プラス　まえそのまま うしろ微分）

証明　$\{f(x)g(x)\}'=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$

$f'(x)$，$g'(x)$の定義式が現れるように，$f(x)g(x+h)$を引いて足す。

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h)+f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\left\{\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x+h)+f(x)\cdot\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}$

ここで，$g(x)$は微分可能であるから連続であるので　$\lim_{h\to 0}g(x+h)=g(x)$

よって　$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

商の導関数

関数 $f(x)$，$g(x)$が微分可能であるとき，次の公式が成り立つ。

$\boxed{1}$ $$\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$ （マイナス（分母の 2 乗）分の（分母の微分））

$\boxed{2}$ $$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

（(分母の 2 乗) 分の （上微分 下そのまま マイナス 上そのまま下微分)

$\boxed{証明}$ $\boxed{1}$

$$\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = \lim_{h\to0}\frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to0}\frac{1}{h}\cdot\frac{g(x) - g(x+h)}{g(x+h)g(x)}$$

$$= \lim_{h\to0}\left\{-\frac{1}{g(x+h)g(x)}\cdot\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right\} = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

$g(x)$は連続より
$\lim_{h\to0} g(x+h) = g(x)$

$\boxed{2}$

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \left\{f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right\}'$$

$\frac{f(x)}{g(x)}$を，$f(x)$と$\frac{1}{g(x)}$の積とみなす。

$$= f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}'$$

積の導関数の公式 $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$$= \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x)\cdot\left(-\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}\right)$$

商の導関数の公式$\boxed{1}$を利用

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

x^n（n は整数）の導関数

n が正の整数のとき，　$(x^n)' = nx^{n-1}$　が成り立つことは先ほど確認した。

n が負の整数のときも，　$(x^n)' = nx^{n-1}$　が成り立つかどうかを調べる。

負の整数 n は，m を n と絶対値が等しい正の整数として $n=-m$ とおくことができる。

$$(x^n)' = (x^{-m})' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = -\frac{(x^m)'}{(x^m)^2} = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1} = nx^{n-1}$$

よって，n が負の整数のときも，　$(x^n)' = nx^{n-1}$　が成り立つ。また，$(x^0)' = (1)' = 0$ であるから，

$n=0$ のときも，　$(x^n)' = nx^{n-1}$　が成り立つ。以上から，次の公式が成り立つ。

・n が整数のとき　$(x^n)' = nx^{n-1}$

解答

(1)　$y' = \{(x+3)(2x^2-1)\}'$

$= (x+3)'\cdot(2x^2-1) + (x+3)\cdot(2x^2-1)'$

$= 1\cdot(2x^2-1) + (x+3)\cdot 4x$

$= 2x^2 - 1 + 4x^2 + 12x$

$= \mathbf{6x^2 + 12x - 1}$

$(x+3)' = 1$,
$(2x^2-1)' = 2\cdot 2x^{2-1} = 4x$

(2)　①　$\boldsymbol{y'} = \left(\dfrac{1}{x+1}\right)' = -\dfrac{(x+1)'}{(x+1)^2} = -\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{(x+1)^2}}$

②　$\boldsymbol{y'} = \left(\dfrac{2}{x}\right)' = \dfrac{(2)'\cdot x - 2\cdot(x)'}{x^2} = \dfrac{0-2\cdot 1}{x^2} = -\dfrac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{x^2}}$

別解　$\dfrac{2}{x} = 2x^{-1}$ とみると　$y' = \left(\dfrac{2}{x}\right)' = (2x^{-1})' = -1\cdot 2x^{-1-1} = -2x^{-2} = -\dfrac{2}{x^2}$

③　$\boldsymbol{y'} = \left(\dfrac{2x}{x^2-1}\right)' = \dfrac{(2x)'\cdot(x^2-1) - 2x\cdot(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \dfrac{2(x^2-1)-2x\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{2x^2-2-4x^2}{(x^2-1)^2}$

$= -\dfrac{\boldsymbol{2(x^2+1)}}{\boldsymbol{(x^2-1)^2}}$

4　**合成関数の微分法**

関数 $y=(x^2+2)^3$ を微分せよ。

要　点

関数$y=f(x)$において，xの増分をΔx，Δxに対するyの増分$f(x+\Delta x)-f(x)$をΔyで表すと，導関数$f'(x)$は次のように表される。

$$\boldsymbol{f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}$$

合成関数の微分法

$y=f(u)$が u の関数として微分可能，$u=g(x)$が x の関数として微分可能であるとき，合成関数 $y=f(g(x))$もxの関数として微分可能で　$\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}}$

証明　$u=g(x)$において，xの増分Δxに対するuの増分をΔu，$y=f(u)$において，uの増分Δuに対するyの増分をΔyとして　$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$　と変形することができる。

ここで，$\Delta u = g(x+\Delta x)-g(x)$で，$g(x)$は連続であるから，$\Delta x \to 0$ のとき$\Delta u \to 0$ となる。

よって　$\dfrac{dy}{dx} = \displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

ここで，$y=f(u)$と $u=g(x)$の合成関数 $y=f(g(x))$において，

$$\frac{dy}{dx} = \{f(g(x))\}',\qquad \frac{dy}{du} = f'(u) = f'(g(x)),\qquad \frac{du}{dx} = g'(x)$$

であるから，合成関数の微分法の公式　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$　は，次のようにも表される。

$$\boldsymbol{\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)}$$

解答

$y' = \{(x^2+2)^3\}' = 3(x^2+2)^{3-1}\cdot(x^2+2)'$

$= 3(x^2+2)^2\cdot 2x$

$\boldsymbol{= 6x(x^2+2)^2}$

この関数のように，　$y=\{g(x)\}^n$　（n は整数）
と表されるとき，　$\boldsymbol{y' = n\{g(x)\}^{n-1}g'(x)}$
が成り立つ。

$u=g(x)=x^2+2$ とおくと，$y=\{g(x)\}^3=u^3=f(u)$
であるから

$$y' = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = f'(u)\cdot g'(x)$$

5　**逆関数の微分法**

関数$y=\sqrt[3]{3x}$　$(x>0)$　を微分せよ。

要　点

逆関数の微分法

関数 $y=f(x)$が，$x=g(y)$と表すことができるとする。
この両辺を x の関数とみて，それぞれについて微分すると，

左辺は　$\dfrac{d}{dx}x = 1$

右辺は　$\dfrac{d}{dx}g(y) = \dfrac{d}{dy}g(y)\cdot\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dx}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}$

となるから　$1 = \dfrac{dx}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}$

よって，　$\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}}$　が成り立つ。

$x=g(y)$の x と y を入れかえて
$y=g(x)$と表したものが，もと
の関数の逆関数 $y=f^{-1}(x)$である。

関数 $y=f(x)$のままでは微分しづらいが，x について
解いた $x=g(y)$の形だと微分しやすいとき，逆関数の
微分法を利用するとよい。

x^r（r は有理数）の導関数

r が有理数のときも，　$(x^r)' = rx^{r-1}$ が成り立つかどうかを調べる。

まず，qを正の整数として，$r=\dfrac{1}{q}$で表される関数$y=x^r$の導関数について考える。

$y=x^{\frac{1}{q}}$の両辺をq乗すると，$x=y^q$から　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}} = \dfrac{1}{qy^{q-1}} = \dfrac{1}{q}\cdot\dfrac{1}{\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{q-1}} = \dfrac{1}{q}\cdot\dfrac{1}{x^{1-\frac{1}{q}}} = \dfrac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1} = rx^{r-1}$

次に，pを整数，qを正の整数として，$r=\dfrac{p}{q}$で表される関数$y=x^r$の導関数は，$x^r = x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$ より

$$y' = (x^r)' = \left\{\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p\right\}' = p\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{p-1}\cdot\left(x^{\frac{1}{q}}\right)' = px^{\frac{p-1}{q}}\cdot\frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-\frac{1}{q}+\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1} = rx^{r-1}$$

以上から，次の公式が成り立つ。

・r が有理数のとき　$(x^r)' = rx^{r-1}$

解答

$y=\sqrt[3]{3x}$ より　$y^3=3x$　　すなわち　$x=\dfrac{1}{3}y^3$

逆関数の微分法により　　$\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx}}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{3}\cdot 3y^2}=\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{3x}\right)^2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt[3]{9x^2}}}$

$\boxed{\text{別解}}$　$y=\sqrt[3]{3x}=\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{3}\cdot x^{\frac{1}{3}}$ より

$$y'=\sqrt[3]{3}\cdot\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}=\frac{\sqrt[3]{3}}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^3}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{9x^2}}$$

6　**三角関数の導関数**

次の関数を微分せよ。

(1)　$y=\sin 2x$　　　　(2)　$y=\dfrac{x}{\tan x}$

要　点

三角関数の導関数

$$(\sin x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\sin h-\sin x\,(1-\cos h)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\cos x\cdot\frac{\sin h}{h}-\sin x\cdot\frac{1-\cos h}{h}\right)$$

三角関数の加法定理
$\sin(x+h)=\sin x\cos h+\cos x\sin h$

ここで，　$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$，

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos^2 h}{h(1+\cos h)}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin^2 h}{h(1+\cos h)}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\cdot\frac{\sin h}{1+\cos h}=1\cdot\frac{0}{1+1}=0$$

であるから　　$(\sin x)'=\cos x\cdot 1-\sin x\cdot 0=\cos x$

$$(\cos x)'=\left\{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right\}'=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{\pi}{2}\right)'=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot 1=-\sin x$$

$$(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

以上から，三角関数の導関数について，次の公式が成り立つ。

$$\boldsymbol{(\sin x)'=\cos x,\quad (\cos x)'=-\sin x,\quad (\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}}$$

解答

(1)　合成関数の微分法により　y' ＝(sin2x)′ ＝cos2x・(2x)′ ＝**2cos2x**

$\boxed{\text{別解}}$　sin2x＝2sin$x$cos$x$ より，積の導関数の公式を利用すると

y' ＝(sin2x)′ ＝(2sin$x$cos$x$)′ ＝2(sin$x$)′ cos$x$＋2sin$x$(cos$x$)′ ＝2cos$x$・cos$x$＋2sin$x$・(－sin$x$)

＝2cos^2x－2sin^2x＝2cos2x

(2)　$$\boldsymbol{y'} = \left(\frac{x}{\tan x}\right)' = \frac{(x)'\tan x - x(\tan x)'}{\tan^2 x} = \frac{\tan x - x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\tan^2 x} = \frac{\dfrac{\sin x}{\cos x} - \dfrac{x}{\cos^2 x}}{\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \boldsymbol{\frac{\sin x\cos x - x}{\sin^2 x}}$$

tan$x$ の導関数の公式をあえて用いず，sin$x$，cos$x$ の導関数の公式のみを用いて，次のようにしてもよい。

$$y' = \left(\frac{x}{\tan x}\right)' = \left(\frac{x}{\dfrac{\sin x}{\cos x}}\right)' = \left(\frac{x\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(x\cos x)'\sin x - x\cos x\,(\sin x)'}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\{(x)'\cos x + x(\cos x)'\}\sin x - x\cos x\cdot\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\{\cos x + x\cdot(-\sin x)\}\sin x - x\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\cos x\sin x - x\sin^2 x - x\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x\cos x - x(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = \frac{\sin x\cos x - x}{\sin^2 x}$$

$\boxed{7}$　**対数関数・指数関数の導関数**

(1)　次の関数を微分せよ。

①　y＝(log x)^2　　②　y＝log$_2$(3x＋2)　　③　y＝log | x^2－3 |

(2)　関数$y = \dfrac{\sqrt{2x-1}}{x-1}$を微分せよ。

(3)　次の関数を微分せよ。

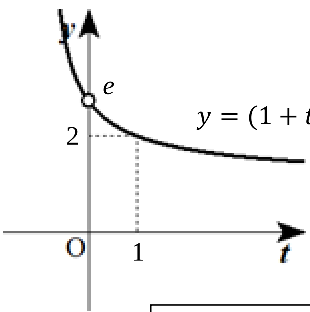
①　$y = x^2e^{2x}$　　②　$y = 2^{-x^2}$

要　点

自然対数の底 *e*

$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$ の極限値を ***e*** とする。

e＝2.718……であり，無理数であることが知られている。



残念ながら，$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$ は，

高校数学で求めることはできない。

対数関数の導関数

$y=\log_a x$　（$a>0$，$a\neq 1$）の導関数を考える。

$$y'=(\log_a x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\frac{x+h}{x}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

ここで$\frac{h}{x}=t$とおくと，対数関数$y=\log_a x$の定義域は$x>0$であるから，$h\longrightarrow 0$のとき$t\longrightarrow 0$である。

よって　$(\log_a x)'=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{x\cdot t}\log_a(1+t)=\frac{1}{x}\lim_{t\to 0}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}$

$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$であるから　$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\log_e a}$

特に $a=e$ のとき，e を底とする対数 $\log_e x$ を x の **自然対数** という。一般に，$\log_e x$ は底 e を省略して **log *x*** と書く。

$\log_e e=\log e=1$ より，対数関数の導関数について，次の公式が成り立つ。

$$(\boldsymbol{\log x})'=\boldsymbol{\frac{1}{x}},\qquad (\boldsymbol{\log_a x})'=\boldsymbol{\frac{1}{x\log a}}$$

$(\log|x|)'$，$(\log_a|x|)'$ について考える。

$x>0$ のとき　$(\log|x|)'=(\log x)'=\frac{1}{x}$，　　$x<0$ のとき　$(\log|x|)'=\{\log(-x)\}'=\frac{1}{-x}\cdot(-x)'=\frac{1}{x}$

よって　$(\log|x|)'=\frac{1}{x}$　　　また　$(\log_a|x|)'=\left(\frac{\log|x|}{\log a}\right)'=\frac{1}{\log a}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x\log a}$

したがって，次の公式が成り立つ。

$$(\boldsymbol{\log|x|})'=\boldsymbol{\frac{1}{x}},\qquad (\boldsymbol{\log_a|x|})'=\boldsymbol{\frac{1}{x\log a}}$$

合成関数の微分法により　$\{\boldsymbol{\log|f(x)|}\}'=\boldsymbol{\frac{f'(x)}{f(x)}}$

x^α（α は実数）の導関数

α が実数のときも，　$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$ が成り立つかどうかを調べる。

$y=x^\alpha$ の両辺の自然対数をとると　$\log y=\alpha\log x$

両辺をxについて微分すると　$\frac{y'}{y}=\alpha\cdot\frac{1}{x}=\frac{\alpha}{x}$　　よって　$y'=\frac{\alpha}{x}\cdot y=\frac{\alpha}{x}\cdot x^\alpha=\alpha x^{\alpha-1}$

したがって，次の公式が成り立つ。

・α が実数のとき　　$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$

例えば，$\alpha=e$（自然対数の底）であるとき，　$(x^e)'=ex^{e-1}$　である。

また，両辺の自然対数をとる微分法を **対数微分法** という。

指数関数の導関数

$y=a^x$ （$a>0$，$a\neq1$）の導関数を考える。

$y=a^x$の両辺の自然対数をとると　$\log y=x\log a$　　両辺をxについて微分すると　$\dfrac{y'}{y}=\log a$

よって　$y'=y\log a=a^x\log a$　　特に $a=e$ のとき，$\log e=1$ であるから　$(e^x)'=e^x$

したがって，指数関数の導関数について，次の公式が成り立つ。

$(e^x)'=e^x$,　　$(a^x)'=a^x\log a$

合成関数の微分法により　**$\{e^{f(x)}\}'=e^{f(x)}\cdot f'(x)$**

解答

(1)　①　$\boldsymbol{y'}=\{(\log x)^2\}'=2\log x\cdot(\log x)'=\boldsymbol{\dfrac{2\log x}{x}}$

②　$\boldsymbol{y'}=\{\log_2(3x+2)\}'=\dfrac{(3x+2)'}{(3x+2)\log 2}=\boldsymbol{\dfrac{3}{(3x+2)\log 2}}$

③　$\boldsymbol{y'}=(\log|x^2-3|)'=\dfrac{(x^2-3)'}{x^2-3}=\boldsymbol{\dfrac{2x}{x^2-3}}$

(2)　（対数微分法を用いる。）

$y=\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x-1}$ の両辺の絶対値の自然対数をとると

$$\log|y|=\log\left|\frac{\sqrt{2x-1}}{x-1}\right|=\frac{1}{2}\log|2x-1|-\log|x-1|$$

両辺を x について微分すると

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-1)'}{2x-1}-\frac{(x-1)'}{x-1}=\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{x-1}=\frac{x-1-(2x-1)}{(2x-1)(x-1)}=-\frac{x}{(2x-1)(x-1)}$$

よって　$\boldsymbol{y'}=-\dfrac{x}{(2x-1)(x-1)}\cdot\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x-1}=\boldsymbol{-\dfrac{x}{(x-1)^2\sqrt{2x-1}}}$

対数関数の微分法において，真数部分に絶対値が付いていても，微分すると絶対値は外れる。絶対値を付けて対数をとるのは，真数条件をチェックする必要がなくなるため，計算がラクになるからである。

別解　（商の導関数の公式を用いる。）

$$y'=\left(\frac{\sqrt{2x-1}}{x-1}\right)'=\frac{\left(\sqrt{2x-1}\right)'(x-1)-\sqrt{2x-1}\,(x-1)'}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(2x-1)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(2x-1)'(x-1)-\sqrt{2x-1}\cdot1}{(x-1)^2}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{2x-1}}\cdot2(x-1)-\sqrt{2x-1}}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x-1-(2x-1)}{(x-1)^2\sqrt{2x-1}}=-\frac{x}{(x-1)^2\sqrt{2x-1}}$$

対数微分法を用いると，対数関数の真数の積や商を和や差に表すことができ，微分は楽になるが，その結果を通分したり，両辺に y を掛けたりする計算を考えると，全体として計算量はあまり変わらないことが多い。
底と指数の両方に変数を含む関数，例えば $y=x^x$ （$x>0$）のような関数を微分する場合，以下のように対数微分法を用いる必要がある。
$y=x^x$ の両辺の自然対数をとると　$\log y=\log x^x=x\log x$

両辺を x について微分すると　$\dfrac{y'}{y}=(x)'\log x+x(\log x)'=\log x+x\cdot\dfrac{1}{x}=\log x+1$

よって　$y'=(\log x+1)y=(\log x+1)x^x$

(3)　①　$y'=(x^2e^{2x})'=(x^2)'e^{2x}+x^2(e^{2x})'=2x\cdot e^{2x}+x^2\cdot e^{2x}\cdot(2x)'=2xe^{2x}+2x^2e^{2x}=\boldsymbol{2x(1+x)e^{2x}}$

　②　$y'=\left(2^{-x^2}\right)'=2^{-x^2}\cdot\log 2\cdot(-x^2)'=-2x\cdot 2^{-x^2}\log 2=\boldsymbol{-2^{1-x^2}x\log 2}$

8　高次導関数

(1)　次の関数の第 2 次導関数，第 3 次導関数を求めよ。

①　$y=\log x$　　②　$y=\cos^2 x$　　③　$y=xe^x$

(2)　関数 $y=2\sin x+\cos x$ は，等式 $y+y''=0$ を満たすことを示せ。

(3)　関数 $y=e^{2x}$ の第 n 次導関数を求めよ。

要　点

高次導関数

関数 $y=f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が微分可能であるとき，これをさらに微分して得られる導関数を $f(x)$ の **第 2 次導関数** といい，

$$\boldsymbol{y'',\quad f''(x),\quad \frac{d^2y}{dx^2},\quad \frac{d^2}{dx^2}f(x)}$$

y'，$f'(x)$ を第 1 次導関数ということがある。

などの記号で表す。
さらに，第 2 次導関数 $f''(x)$ の導関数を **第 3 次導関数** といい，

$$\boldsymbol{y''',\quad f'''(x),\quad \frac{d^3y}{dx^3},\quad \frac{d^3}{dx^3}f(x)}$$

などの記号で表す。
一般に，関数 $y=f(x)$ を n 回微分して得られる関数を $f(x)$ の **第 n 次導関数** といい，

$$\boldsymbol{y^{(n)},\quad f^{(n)}(x),\quad \frac{d^ny}{dx^n},\quad \frac{d^n}{dx^n}f(x)}$$

などの記号で表す。
なお，$y^{(1)}$，$y^{(2)}$，$y^{(3)}$ は，それぞれ y'，y''，y''' を表す。
第 2 次以上の導関数をまとめて，**高次導関数** という。

解答

(1)　①　$y' = (\log x)' = \dfrac{1}{x}$,

$\boldsymbol{y''} = \left(\dfrac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x^2}}$,

$\boldsymbol{y'''} = \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)' = (-x^{-2})' = 2x^{-3} = \dfrac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{x^3}}$

②　$y'=(\cos^2 x)'=2\cos x\cdot(\cos x)'=-2\sin x\cos x=-\sin 2x$,

$\boldsymbol{y''}=(-\sin 2x)'=-\cos 2x\cdot(2x)'\boldsymbol{=-2\cos 2x}$,

$\boldsymbol{y'''}=(-2\cos 2x)'=2\sin 2x\cdot(2x)'\boldsymbol{=4\sin 2x}$

③　$y'=(xe^x)'=(x)'e^x+x(e^x)'=e^x+xe^x=(1+x)e^x$,

$\boldsymbol{y''}=\{(1+x)e^x\}'=(1+x)'e^x+(1+x)(e^x)'=e^x+(1+x)e^x\boldsymbol{=(2+x)e^x}$,

$\boldsymbol{y'''}=\{(2+x)e^x\}'=(2+x)'e^x+(2+x)(e^x)'=e^x+(2+x)e^x\boldsymbol{=(3+x)e^x}$

(2)　$y=2\sin x+\cos x$,

$y'=(2\sin x+\cos x)'=2\cos x-\sin x$,

$y''=(2\cos x-\sin x)'=-2\sin x-\cos x$

よって　$y+y''=(2\sin x+\cos x)+(-2\sin x-\cos x)=0$

(3)　$y=e^{2x}$,　$y'=(e^{2x})'=e^{2x}\cdot(2x)'=2e^{2x}$,　$y''=(2e^{2x})'=2e^{2x}\cdot(2x)'=4e^{2x}$,　……

よって，　$y^{(n)}=2^n e^{2x}$　……①

と推測できる。これを，数学的帰納法を用いて示す。

(ⅰ)　$n=1$ のとき，　$y^{(1)}=y'=2e^{2x}=2^1e^{2x}$ より，①は成り立つ。

(ⅱ)　$n=k$ のとき①が成り立つと仮定すると　$y^{(k)}=2^ke^{2x}$

ここで，$n=k+1$ のときを考えると

$$y^{(k+1)}=\{y^{(k)}\}'=(2^ke^{2x})'=2^ke^{2x}\cdot(2x)'=2^{k+1}e^{2x}$$

よって，$n=k+1$ のときも①は成り立つ。

(ⅰ)，(ⅱ)から，すべての自然数 n について，①は成り立つので　$\boldsymbol{y^{(n)}=2^ne^{2x}}$

9　**曲線のいろいろな表し方と微分法**

(1)　次の曲線の方程式で定められるxの関数yの導関数$\dfrac{dy}{dx}$を，x，yを用いて表せ。

①　$y^2 = 2x$　　　②　$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$　　　③　$xy = 1$

(2)　x，yが，媒介変数tを用いて次の式で表されるとき，xの関数yの導関数$\dfrac{dy}{dx}$をtを用いて表せ。

①　$x=t-1$,　$y=t^2-1$

②　$x=\sin 3t$,　$y=\sin 4t$

要　点

陰関数の導関数

x の関数 y が方程式 $F(x,\ y)=0$ の形で表されているとき，y を x の **陰関数** ということがある。

$F(x,\ y)$の中の y を含む式を $f(y)$とする。

$f(y)$を x で微分するとき，合成関数の微分法を用いて次のようにする。

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}f(y)=\frac{d}{dy}f(y)\cdot\frac{dy}{dx}}$$

陰関数に対して，$y=f(x)$の形で表される関数を **陽関数** ということがある。

媒介変数表示された関数の導関数

x，y が，媒介変数 t を用いて $x=f(t)$，$y=g(t)$で表されており，x，y が t について微分可能で，$f'(t)\neq 0$ のとき，合成関数の微分法により　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}$　また，逆関数の微分法により　$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dt}}$

以上より，次の公式が成り立つ。

$$\boldsymbol{x=f(t),\ y=g(t)\text{のとき}\quad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}}$$

解答

(1)　①　方程式$y^2=2x$の両辺をxで微分すると　$\dfrac{d}{dx}y^2=\dfrac{d}{dx}(2x)$　よって　$2y\cdot\dfrac{dy}{dx}=2$

したがって，$y\neq 0$ のとき　$\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{y}}$

②　方程式$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ の両辺をxで微分すると　$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2}{16}\right)+\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y^2}{9}\right)=\dfrac{d}{dx}(1)$

よって　$\dfrac{x}{8}+\dfrac{2}{9}y\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$　したがって，$y\neq 0$ のとき　$\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{9x}{16y}}$

③　方程式$xy=1$ の両辺をxで微分すると　$\dfrac{d}{dx}(xy)=\dfrac{d}{dx}(1)$

$\dfrac{d}{dx}(xy)=(x)'y+x(y)'$

よって　$1\cdot y+x\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$　したがって　$\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x}}$

(2)　①　$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{d}{dt}(t-1)=1$，　$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{d}{dt}(t^2-1)=2t$であるから　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{2t}{1}=\boldsymbol{2t}$

②　$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{d}{dt}(\sin 3t)=\cos 3t\cdot\dfrac{d}{dt}(3t)=3\cos 3t$，　$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{d}{dt}(\sin 4t)=\cos 4t\cdot\dfrac{d}{dt}(4t)=4\cos 4t$

であるから，$\cos 3t\neq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\boldsymbol{\dfrac{4\cos 4t}{3\cos 3t}}$