2 次関数

$\boxed{1}$ **関数の値**

関数 $f(x)$，$g(x)$が，$f(x)=2x+1$，$g(x)=-x^2+3x+4$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $f(1)$　　(2) $f\left(-\frac{1}{2}\right)$　　(3) $f(a+1)$

(4) $g(-2)$　　(5) $g\left(\frac{1}{3}\right)$　　(6) $g(2a)$

要　点

関数

2 つの変数 x，y があって，x の値を定めるとそれに対応して y の値がただ 1 つ定まるとき，y は x の **関数** であるという。y が x の関数であることを，f などを用いて，$\boldsymbol{y=f(x)}$ と表す。
x の関数を単に **関数 $\boldsymbol{f(x)}$** ともいう。

関数の値

関数 $y=f(x)$ において，x の値 a に対応して定まる y の値を $\boldsymbol{f(a)}$ と書き，$f(a)$を関数 $f(x)$の $x=a$ における **値** という。

解答

$f(x)=2x+1$ であるから

(1) $f(1)=2\cdot1+1=\mathbf{3}$

(2) $f\left(-\frac{1}{2}\right)=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1=\mathbf{0}$

(3) $f(a+1)=2(a+1)+1=2a+2+1=\boldsymbol{2a+3}$

$g(x)=-x^2+3x+4$ であるから

(4) $g(-2)=-(-2)^2+3\cdot(-2)+4=-4-6+4=\mathbf{-6}$

(5) $g\left(\frac{1}{3}\right)=-\left(\frac{1}{3}\right)^2+3\cdot\frac{1}{3}+4=-\frac{1}{9}+1+4=\frac{-1+45}{9}=\boldsymbol{\frac{44}{9}}$

(6) $g(2a)=-(2a)^2+3\cdot2a+4=\boldsymbol{-4a^2+6a+4}$

$\boxed{2}$ **1 次関数の値域**

次の関数の値域を求めよ。

(1) $y=x-2$　$(-1\leqq x\leqq 2)$

(2) $y=-\frac{1}{2}x+4$　$(0\leqq x\leqq 6)$

要　点

定義域・値域

関数 $y=f(x)$ において，変数 x のとり得る値の範囲，すなわち x の変域をこの関数の **定義域** という。また，x が定義域全体を動くとき，$f(x)$ のとり得る値の範囲，すなわち y の変域をこの関数の **値域** という。

$y=f(x)$ の定義域が $a \leqq x \leqq b$ であるときは，関数の式の後ろに(　)をつけて，$\boldsymbol{y=f(x)\quad (a \leqq x \leqq b)}$ のように書くことが多い。特に断らない限り，関数 $y=f(x)$ の定義域は，$f(x)$ の値が定まるような実数 x の全体とする。

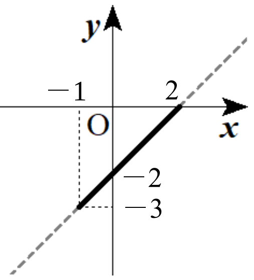
解答

(1)　$y=x-2\quad(-1 \leqq x \leqq 2)$

のグラフは，右の図のようになる。

よって，値域は

$\boldsymbol{-3 \leqq y \leqq 0}$

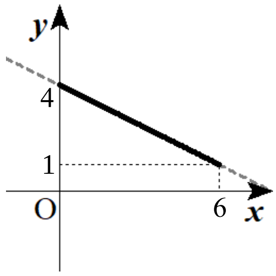


(2)　$y=-\dfrac{1}{2}x+4\quad(0 \leqq x \leqq 6)$

のグラフは，右の図のようになる。

よって，値域は

$\boldsymbol{1 \leqq y \leqq 4}$



$\boxed{3}$　**2 次関数のグラフをかく**

次の 2 次関数のグラフは，2 次関数 $y=x^2$ のグラフをそれぞれどのように平行移動したものか答えよ。また，それぞれのグラフをかき，その軸と頂点を求めよ。

(1)　$y=x^2+2$　　(2)　$y=(x+1)^2$　　(3)　$y=(x-2)^2+3$

要　点

2 次関数 $y=ax^2$ のグラフ

2 次関数 $y=ax^2$ のグラフは **放物線** とよばれる曲線で，原点 O を通り y 軸に関して対称である。放物線の対称軸を **軸** といい，軸と放物線の交点をその放物線の **頂点** という。放物線 $y=ax^2$ の軸は y 軸で，頂点は原点 O である。

また $y=ax^2$ のグラフは, その曲線の形状から, $a>0$ のとき **下に凸** , $a<0$ のとき **上に凸** であるという。

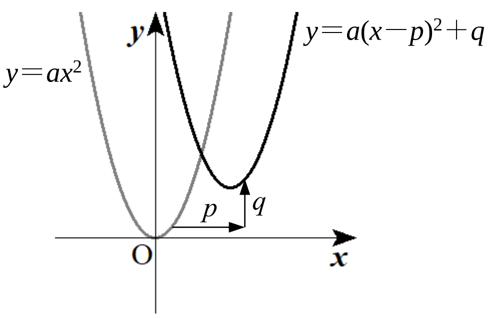
2 次関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

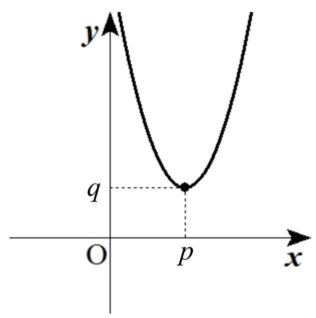
2 次関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを x 軸方向に p，　y 軸方向に q だけ平行移動した放物線である。この放物線の軸は直線 $x=p$，頂点は点$(p,\ q)$である。

〈注意〉直線 $x=p$ は，点$(p,\ 0)$を通り y 軸に平行な直線である。

〈注意〉2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフを **放物線 $y=ax^2+bx+c$** ということもある。また，$y=ax^2+bx+c$ をこの **放物線の方程式** ということもある。

グラフは，頂点$(p,\ q)$を原点とみて，関数 $y=ax^2$ のグラフをかけばよい。





(ｉ) 頂点$(p,\ q)$をとる。

(ⅱ) 頂点$(p,\ q)$を原点とみて，放物線 $y=ax^2$ をかく。

解答

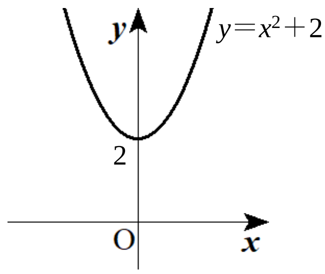
(1)　放物線 $y=x^2+2$ は，放物線 $y=x^2$ を

y 軸方向に 2

だけ平行移動したものである。

軸は 直線 $x=0$（y 軸），　頂点は $(0,\ 2)$

であり，グラフは右の図のようになる。



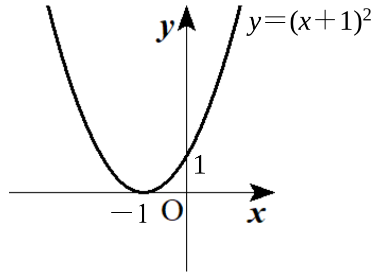
(2)　放物線 $y=(x+1)^2$ は放物線 $y=\{x-(-1)\}^2$ と表されるから，放物線 $y=x^2$ を

x 軸方向に -1

だけ平行移動したものである。

軸は 直線 $x=-1$，　頂点は $(-1,\ 0)$

であり，グラフは右の図のようになる。



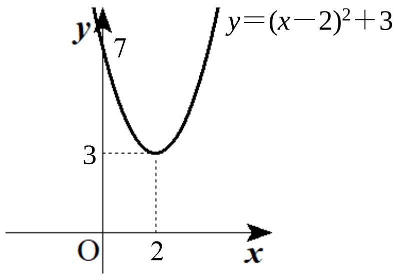
(3)　放物線 $y=(x-2)^2+3$ は，放物線 $y=x^2$ を

x 軸方向に 2，　y 軸方向に 3

だけ平行移動したものである。

軸は 直線 $x=2$，　頂点は $(2,\ 3)$

であり，グラフは右の図のようになる。



$\boxed{4}$ **平方完成と 2 次関数のグラフ**

(1)　次の 2 次関数を平方完成せよ。ただし，②の a は定数とする。

①　$y=2x^2+8x+10$　　　　②　$y=x^2+ax-a$

(2)　2 次関数 $y=-x^2+2x+1$ のグラフをかき，その軸と頂点を求めよ。

要　点

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフ

$y=ax^2+bx+c$ は，次のようにして $y=a(x-p)^2+q$ のように変形できる。この変形を **平方完成** という。

（2 次関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフは，「$\boxed{3}$　**2 次関数のグラフをかく**」の要領でかけばよい。）

$y=ax^2+bx+c$

$=a\left(x^2+\dfrac{b}{a}x\right)+c$　　……　x^2の係数でくくる

$=a\left(x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{b^2}{4a^2}-\dfrac{b^2}{4a^2}\right)+c$　　……　xの係数の半分の 2 乗を加えて引く

$=a\left\{\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2}{4a^2}\right\}+c$　　……　かっこの 2 乗の式を作る

$=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2}{4a}+c$　　……　中かっこを展開すれば出来上がり

軸は　直線$x=-\dfrac{b}{2a}$，　頂点の座標は　$\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2}{4a}+c\right)$

解答

(1)　①　$\boldsymbol{y}=2x^2+8x+10=2(x^2+4x)+10=2(x^2+4x+4-4)+10=2\{(x+2)^2-4\}+10$

$=2(x+2)^2-8+10=\boldsymbol{2(x+2)^2+2}$

②　$\boldsymbol{y}=x^2+ax-a=(x^2+ax)-a=\left(x^2+ax+\dfrac{a^2}{4}-\dfrac{a^2}{4}\right)-a=\boldsymbol{\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}-a}$

(2)　$y=-x^2+2x+1$

$=-(x^2-2x)+1$

$=-(x^2-2x+1-1)+1$

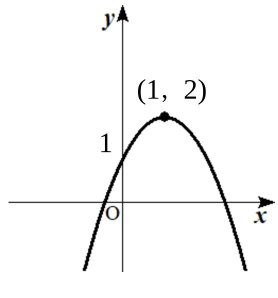
$=-\{(x-1)^2-1\}+1$

$=-(x-1)^2+1+1$

$=-(x-1)^2+2$

軸は　**直線 $\boldsymbol{x=1}$**，　頂点の座標は　**(1，2)**

グラフは右の図のようになる。



5　2 次関数のグラフの平行移動・対称移動

(1)　2 次関数 $y=x^2-2x+3$ のグラフを x 軸方向に -1，y 軸方向に 1 だけ平行移動したグラフの 2 次関数を求めよ。

(2)　放物線 $y=-3x^2+2x+1$ は，放物線 $y=-3x^2-2x-1$ をどのように平行移動すれば得られるか。

(3)　放物線 $y=x^2-2x+3$ を，次のように移動したとき得られる放物線をグラフとする 2 次関数をそれぞれ求めよ。

①　x 軸に関して対称移動　　②　y 軸に関して対称移動　　③　原点に関して対称移動

要　点

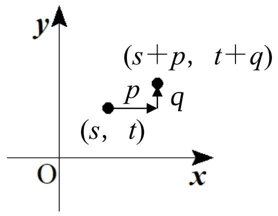
平行移動

放物線を平行移動しても形は変わらないから，平行移動の前後で x^2 の係数は変わらない。

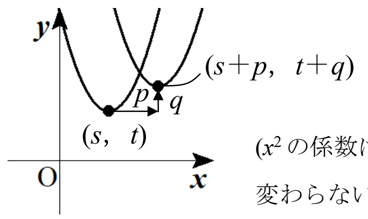
点$(s,\ t)$を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した点の座標は$(s+p,\ t+q)$である。

よって，頂点が$(s,\ t)$である放物線 $y=ax^2+bx+c$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した放物線は，放物線 $y=ax^2$ を点$(s+p,\ t+q)$が頂点となるように平行移動した放物線である。

点の移動



放物線の平行移動



(x^2 の係数は変わらない)

対称移動

点$(a,\ b)$を　x 軸に関して対称移動すると

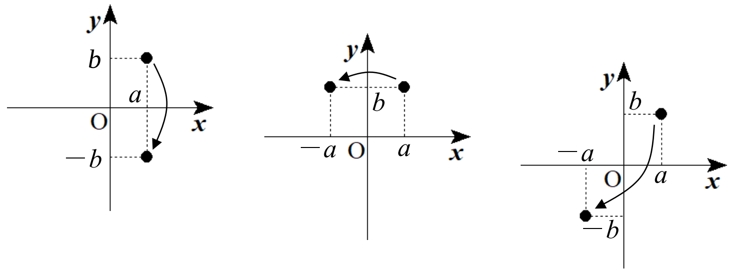
点$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{-b})$　に移る。

点$(a,\ b)$を　y 軸に関して対称移動すると

点$(\boldsymbol{-a},\ \boldsymbol{b})$　に移る。

点$(a,\ b)$を　原点に関して対称移動すると

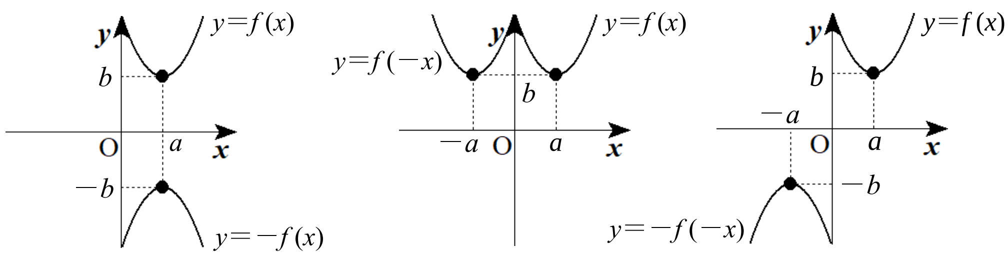
点$(\boldsymbol{-a},\ \boldsymbol{-b})$　に移る。



関数 $y=f(x)$のグラフを，x 軸に関して対称移動したグラフの関数は　$\boldsymbol{y=-f(x)}$

y 軸に関して対称移動したグラフの関数は　$\boldsymbol{y=f(-x)}$

原点に関して対称移動したグラフの関数は　$\boldsymbol{y=-f(-x)}$



解答

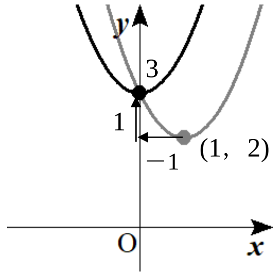
(1)　$y=x^2-2x+3=(x-1)^2-1+3=(x-1)^2+2$ であるから，

頂点は　$(1,\ 2)$

x 軸方向に-1，y 軸方向に 1 だけ平行移動させると，

頂点の座標は$(0,\ 3)$になる。

したがって　$\boldsymbol{y=x^2+3}$



(2)　$y=-3x^2-2x-1=-3\left(x^2+\frac{2}{3}x\right)-1=-3\left(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\right)-1$

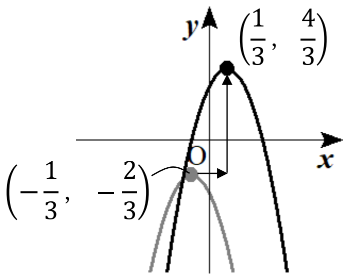
$$=-3\left\{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}\right\}-1=-3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}-1=-3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{2}{3}$$

であるから，頂点は　$\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$

$$y=-3x^2+2x+1=-3\left(x^2-\frac{2}{3}x\right)+1=-3\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\right)+1$$

$$=-3\left\{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}\right\}+1=-3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}+1=-3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{4}{3}$$

であるから，頂点は　$\left(\frac{1}{3},\ \frac{4}{3}\right)$



$\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$,

$\frac{4}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)=2$

それぞれの頂点の座標から，**x軸方向に$\frac{2}{3}$，y軸方向に2平行移動すれば得られる**ことがわかる。

(3)　①　$\boldsymbol{y}=-(x^2-2x+3)$

$\boldsymbol{=-x^2+2x-3}$

$y=x^2-2x+3=(x^2-2x)+3=(x^2-2x+1-1)+3=(x-1)^2-1+3$

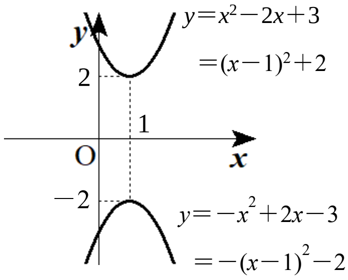
$=(x-1)^2+2$,

$y=-x^2+2x-3=-(x^2-2x)-3$

$=-(x^2-2x+1-1)-3=-(x-1)^2+1-3$

$=-(x-1)^2-2$

であるから，グラフは右の図のようになり，x 軸に関して対称移動していることが確認できる。



②　$\boldsymbol{y}=(-x)^2-2(-x)+3$

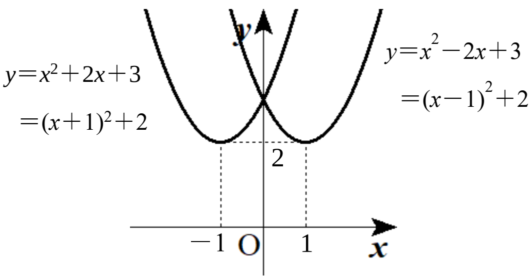
$\boldsymbol{=x^2+2x+3}$

$y=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$,

$y=x^2+2x+3=(x^2+2x)+3=(x^2+2x+1-1)+3=(x+1)^2-1+3$

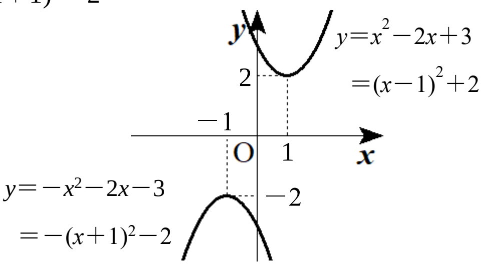
$=(x+1)^2+2$

であるから，グラフは右の図のようになり，y 軸に関して対称移動していることが確認できる。



③　$y=-\{(-x)^2-2(-x)+3\}$
　　$\boldsymbol{=-x^2-2x-3}$

$y=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$,
$y=-x^2-2x-3=-(x^2+2x)-3=-(x^2+2x+1-1)-3$
$=-(x+1)^2+1-3=-(x+1)^2-2$
であるから，グラフは右の図のようになり，原点に関して対称移動していることが確認できる。



$\boxed{6}$　**2 次関数の最大・最小**

(1)　次の 2 次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。
　①　$y=x^2+4x$　　　　②　$y=-2x^2+2x+1$

(2)　関数 $y=x^2-2x-1$ $(0\leqq x\leqq 3)$ の最大値および最小値を求めよ。

(3)　関数 $y=-x^2+2ax$ $(0\leqq x\leqq 2)$ の最大値を，定数 a を次の 3 つの場合に分けて求めよ。
　①　$a<0$　　　②　$0\leqq a\leqq 2$　　　③　$2<a$

要　点

関数の値域に最大の値があるとき，その値をこの関数の **最大値** といい，最小の値があるとき，その値をこの関数の **最小値** という。

2 次関数 $y=a(x-p)^2+q$ は　**$a>0$ のとき，$x=p$ で最小値 q をとり，最大値はない。**
　　$a<0$ のとき，$x=p$ で最大値 q をとり，最小値はない。

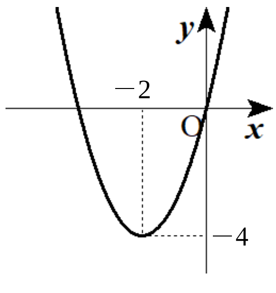
定義域に制限がある 2 次関数では，頂点の x 座標が定義域に含まれているかどうかに注目し，
頂点の y 座標，定義域の両端での y 座標を調べる。

(3)　①～③の場合における頂点の x 座標と定義域の位置関係を調べ，最大値を求める。

解答

(1)　①　$y=x^2+4x$
　　$=x^2+4x+4-4$
　　$=(x+2)^2-4$

よって，**$x=-2$ で最小値 -4 をとり，**
　　最大値はない。

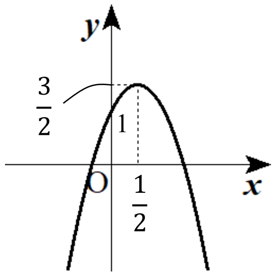


②　$y=-2x^2+2x+1=-2(x^2-x)+1$

$$=-2\left(x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+1=-2\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}+1$$

$$=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}+1=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$$

よって，$\boldsymbol{x=\frac{1}{2}}$ **で最大値** $\boldsymbol{\frac{3}{2}}$ **をとり，最小値はない。**



(2)　$y=x^2-2x-1=x^2-2x+1-1-1$

　　$=(x-1)^2-1-1=(x-1)^2-2$

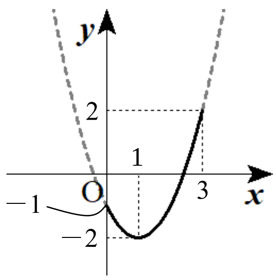
定義域が $0 \leqq x \leqq 3$ であるから

右のグラフより，

　　$x=3$ で最大値 2,

　　$x=1$ で最小値 -2

をとる。



(3)　$y=-x^2+2ax=-(x^2-2ax)=-(x^2-2ax+a^2-a^2)=-\{(x-a)^2-a^2\}$

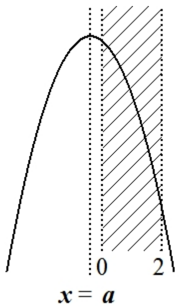
　　$=-(x-a)^2+a^2$　$(0 \leqq x \leqq 2)$

このグラフは上に凸であり，定義域が決まっていて，頂点が動く。

①　$a<0$ のとき

軸は $x=a$ であり，$a<0$ のとき軸は定義域 $0 \leqq x \leqq 2$ の左外にある。

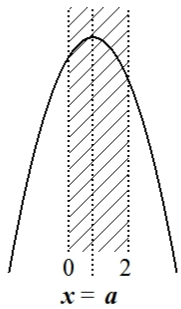
よって，**$x=0$** で最大となり，**最大値は 0**



②　$0 \leqq a \leqq 2$ のとき

軸 $x=a$ は定義域 $0 \leqq x \leqq 2$ の内側にある。

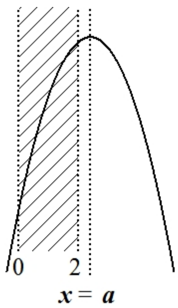
よって，**$x=a$** で最大となり，**最大値は a^2**



③　$2<a$ のとき

軸 $x=a$ は定義域 $0 \leqq x \leqq 2$ の右外にある。

よって，**$x=2$** で最大となり，**最大値は $-4+4a$**



7　2 次関数の決定

グラフが次の条件を満たすような 2 次関数を求めよ。

(1)　頂点が(2，1)で，点(3，−1)を通る。

(2)　x 軸と 2 点(1，0)，(3，0)で交わり，y 切片が 3 である。

(3)　3 点(−1，−2)，(1，6)，(2，7)を通る。

要　点

2 次関数の決定では，どの形からスタートするかが重要となる。

次の 3 パターンを，問題によって使い分けるとよい。

Ⅰ　頂点の座標$(p,\ q)$，または軸 $x=p$ がわかっているとき

$$\boldsymbol{y=a(x-p)^2+q}$$

Ⅱ　x 軸との交点 $(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ がわかっているとき

$$\boldsymbol{y=a(x-\alpha)(x-\beta)}$$

Ⅲ　その他

$$\boldsymbol{y=ax^2+bx+c}$$

解答

(1)　頂点 $(2,\ 1)$ がわかっているから，Ⅰを用いる。

$$y=a(x-2)^2+1$$

点$(3,\ -1)$を通るから $x=3$，$y=-1$ を代入する。　$-1=a+1$

これより　$a=-2$

よって　$\boldsymbol{y=-2(x-2)^2+1}$　　すなわち　$\boldsymbol{y=-2x^2+8x-7}$

$-2(x-2)^2+1$
$=-2(x^2-4x+4)+1$
$=-2x^2+8x-8+1$
$=-2x^2+8x-7$

(2)　x 軸との交点 $(1,\ 0)$，$(3,\ 0)$ がわかっているから，Ⅱを用いる。

$$y=a(x-1)(x-3)$$

y 切片が 3 であるから $x=0$，$y=3$ を代入すると　$3=a\cdot(-1)\cdot(-3)$　　これより　$a=1$

よって　$\boldsymbol{y=(x-1)(x-3)}$　　すなわち　$\boldsymbol{y=x^2-4x+3}$

(3)　通る 3 点がわかっているときは，Ⅲを用いて a，b，c を求める。

$y=ax^2+bx+c$ に $x=-1$，$y=-2$ および $x=1$，$y=6$ および $x=2$，$y=7$ を代入して連立方程式を作る。

$$\begin{cases} -2=a-b+c & \cdots\cdots① \\ 6=a+b+c & \cdots\cdots② \\ 7=4a+2b+c & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

②－①から　$2b=8$　　よって　$b=4$

①，③に $b=4$ を代入すると

$$\begin{cases} a+c=2 \\ 4a+c=-1 \end{cases}$$

この連立方程式を解くと　$a=-1$，$c=3$

以上より　$\boldsymbol{y=-x^2+4x+3}$

8　**2 次方程式**

次の 2 次方程式を解け。

(1)　$x^2-5x-6=0$　　(2)　$10x^2-13x-3=0$

(3)　$2x^2-3x-1=0$　　(4)　$x^2-6x+7=0$

要　点

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の左辺が因数分解できる場合は，因数分解をして解を求める。
因数分解できない場合は，次の解の公式を利用する。

$$\textbf{2次方程式}\ ax^2+bx+c=0\ \textbf{の解は}\quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

特に $b=2b'$ のとき，

$$\textbf{2次方程式}\ ax^2+2b'x+c=0\ \textbf{の解は}\quad x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

解答

(1)　$x^2-5x-6=0$

左辺を因数分解して　$(x+1)(x-6)=0$

よって，$x+1=0$　　または　$x-6=0$

したがって　$\boldsymbol{x=-1,\ 6}$

(2)　$10x^2-13x-3=0$

左辺を因数分解して

$(2x-3)(5x+1)=0$

$$\begin{array}{ccccc} 2 & \diagdown\!\!\!\diagup & -3 & \longrightarrow & -15 \\ 5 & \diagup\!\!\!\diagdown & 1 & \longrightarrow & 2 \\ \hline & & & & -13 \end{array}$$

よって，$2x-3=0$　　または　$5x+1=0$

したがって　$\boldsymbol{x=\frac{3}{2},\ -\frac{1}{5}}$

(3)　$2x^2-3x-1=0$

解の公式により　$x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot2\cdot(-1)}}{2\cdot2}=\boldsymbol{\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{4}}$

(4)　$x^2-6x+7=0$

この 2 次方程式は $x^2+2\cdot(-3)x+7=0$ とみることができるので

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-1\cdot7}}{1}=\boldsymbol{3\pm\sqrt{2}}$$

$\boxed{9}$　**2 次方程式の実数解の個数**

(1)　次の 2 次方程式の実数解の個数を求めよ。

①　$x^2+x-1=0$　　　　②　$x^2+x+1=0$

(2)　2 次方程式 $x^2+mx+4=0$ が重解をもつとき，定数 m の値を求めよ。また，そのときの 2 次方程式の重解を求めよ。

要　点

2 次方程式の実数解の個数

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は $b^2-4ac>0$ のとき，異なる 2 つの実数解

$x=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，$\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ をもつ。また，$b^2-4ac=0$ のとき，解は $x=-\dfrac{b}{2a}$ となり 1 つであるが，この場合は 2 つの解が重なったものと考えて **重解** という。$b^2-4ac<0$ のとき，実数 x は存在しない。すなわち，この 2 次方程式は実数解をもたない。

一般に，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解の個数は，解の公式の根号内の b^2-4ac の符号によって判別できる。この b^2-4ac を 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の **判別式** といい，普通 D で表す。

$D\ (=b^2-4ac)>0$ のとき，異なる 2 個の実数解をもつ

$D\ (=b^2-4ac)=0$ のとき，1 個の実数解（重解）をもつ

$D\ (=b^2-4ac)<0$ のとき，実数解をもたない（実数解の個数は 0 個）

なお，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が**実数解をもつための条件は，$D\geqq 0$** である。

解答

(1)　与えられた 2 次方程式の判別式を D とする。

①　$D=1^2-4\cdot1\cdot(-1)=1+4=5$　　$D>0$ であるから，実数解の個数は　**2 個**

②　$D=1^2-4\cdot1\cdot1=1-4=-3$　　$D<0$ であるから，実数解の個数は　**0 個**

(2)　与えられた 2 次方程式の判別式を D とすると　$D=m^2-4\cdot1\cdot4=m^2-16=(m+4)(m-4)$

重解をもつための条件は，$D=0$ が成り立つことである。

よって　$(m+4)(m-4)=0$　　これを解いて　$m=-4,\ 4$

$m=-4$ のとき，2 次方程式は $x^2-4x+4=0$ となる。これを解くと　$x=2$

$m=4$ のとき，2 次方程式は $x^2+4x+4=0$ となる。これを解くと　$x=-2$

したがって，**$m=-4$ のとき重解は $x=2$，　$m=4$ のとき重解は $x=-2$**

１０　**2 次関数のグラフと x 軸の共有点**

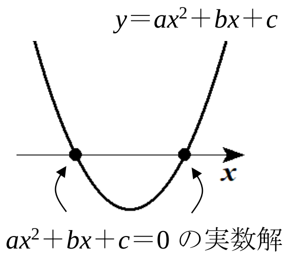
2 次関数 $y=x^2+6x+k$ のグラフと x 軸との共有点の個数は，定数 k の値によってどのように変わるか。

要　点

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸が共有点をもつとき，その共有点の x 座標は，$y=0$ として得られる 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解である。

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸が共有点をもたないとき，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は実数解をもたない。

よって，2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の共有点の個数は，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解の個数と一致する。



このことから，2 次方程式の判別式 $D=b^2-4ac$ の符号から共有点の個数を調べることができる。

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると，放物線 $y=ax^2+bx+c$ と x 軸の共有点の個数は，次のようになる。

D (＝b^2-4ac) ＞0 のとき，異なる 2 個の共有点をもつ

D (＝b^2-4ac) ＝0 のとき，1 点で接する

D (＝b^2-4ac) ＜0 のとき，共有点をもたない（共有点の個数は 0 個）

〈注意〉放物線 $y=ax^2+bx+c$ と x 軸の共有点が 1 つのとき，放物線と x 軸は **接する** といい，その共有点を **接点** という。

なお，放物線 $y=ax^2+bx+c$ と x 軸と**共有点をもつための条件は，$D \geqq 0$** である。

解答

2 次方程式 $x^2+6x+k=0$ の判別式を D とすると，$D=6^2-4\cdot1\cdot k=36-4k$ である。

(ⅰ) 異なる 2 つの共有点をもつとき，$D>0$ であるから　$36-4k>0$　　すなわち　$k<9$

(ⅱ) 1 点で接するとき，$D=0$ であるから　$36-4k=0$　　すなわち　$k=9$

(ⅲ) 共有点をもたないとき，$D<0$ であるから　$36-4k<0$　　すなわち　$k>9$

(ⅰ)，(ⅱ)，(ⅲ)より $\begin{cases} \boldsymbol{k<9}\textbf{のとき　2個} \\ \boldsymbol{k=9}\textbf{のとき　1個} \\ \boldsymbol{k>9}\textbf{のとき　0個} \end{cases}$

１１　**2 次不等式**

(1) 次の 2 次不等式を解け。

① $x^2+x-12>0$　　② $2 \geqq x^2$　　③ $x^2+4x+4 \leqq 0$　　④ $x^2-2x+2<0$

(2) 連立不等式 $\begin{cases} 2x^2-7x+6 \leqq 0 \\ x^2>3 \end{cases}$ を解け。

要　点

《準備》

式の整理

与えられた式を

（x^2 の係数がプラスの 2 次式）（不等号＜，≦，＞，≧のいずれか）0

と整理する。（例：$-x^2<x+2$　⇒　$x^2+x+2>0$）

2 次不等式の解

$y=$（2 次式）のグラフから，2 次不等式の解は

$y>0$（$\geqq 0$）のとき，x 軸の上側，$y<0$（$\leqq 0$）のとき，x 軸の下側

である x の範囲となる。

《パターン別 2 次不等式の解法》

整理した 2 次不等式の，不等号を等号に置き換えた 2 次方程式を $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$ とする。

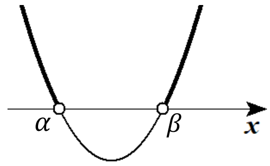
整理した 2 次不等式から，2 次関数 $y=$（左辺の 2 次式）のグラフを考える。

このグラフと x 軸との共有点の個数によって，2 次不等式の解法は 3 パターンに分かれる。

● **パターン１**　x 軸との共有点が 2 個のとき

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解を α，β $(\alpha<\beta)$ とする。

(ⅰ)　$ax^2+bx+c>0$ $(\geqq 0)$ のとき

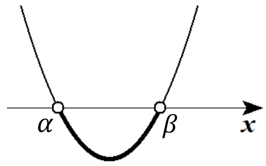


x 軸の上側の部分（右の図の太線部分）が

2 次不等式の解となる。

したがって　$\boldsymbol{x<\alpha,\ \beta<x}$　（$\boldsymbol{x\leqq\alpha,\ \beta\leqq x}$）

(ⅱ)　$ax^2+bx+c<0$ $(\leqq 0)$ のとき



x 軸の下側の部分（右の図の太線部分）が

2 次不等式の解となる。

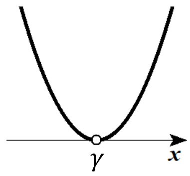
したがって　$\boldsymbol{\alpha<x<\beta}$　（$\boldsymbol{\alpha\leqq x\leqq\beta}$）

● **パターン２**　x 軸との共有点が 1 個のとき

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の重解を γ とする。

このパターンでは，＜と≦，＞と≧で不等式の解がちがってくるため，注意が必要である。

(ⅰ)　$ax^2+bx+c>0$ のとき

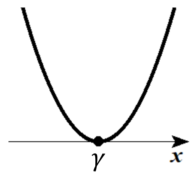


$y>0$ は，x 軸を含まない x 軸の上側なので

不等式の解は　**$\boldsymbol{\gamma}$ 以外のすべての実数**

これは，$\boldsymbol{x<\gamma,\ \gamma<x}$　と書いてもよい。

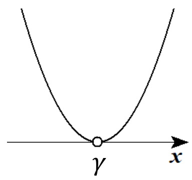
(ⅱ)　$ax^2+bx+c\geqq 0$ のとき



$y\geqq 0$ は，x 軸を含む x 軸の上側なので

不等式の解は　**すべての実数**

(ⅲ)　$ax^2+bx+c<0$ のとき

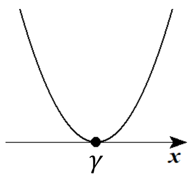


$y<0$ は，x 軸を含まない x 軸の下側であるが，

右の図から，その部分にグラフはない。

したがって　**解はない**

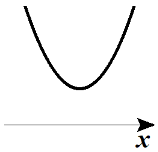
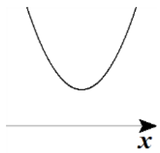
(ⅳ)　$ax^2+bx+c\leqq 0$ のとき



$y\leqq 0$ は，x 軸を含む x 軸の下側なので，

接点だけが条件を満たす。

したがって　$\boldsymbol{x=\gamma}$

> ● **パターン３**　x 軸との共有点が 0 個のとき
> 2 次関数のグラフは右の図のようになる。
> (ⅰ)　$ax^2+bx+c>0\ (\geqq 0)$ のとき
> 　不等式の解は　**すべての実数**
> (ⅱ)　$ax^2+bx+c<0\ (\leqq 0)$ のとき
> 　この不等式に　**解はない**
>
> 
>
> 
>

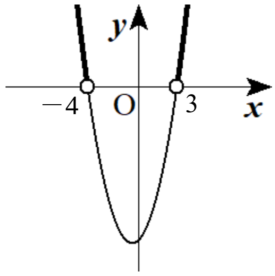
解答

(1)　①　$x^2+x-12>0$

　$x^2+x-12=0$ の解は，$x^2+x-12=(x+4)(x-3)=0$ より

　　　$x=-4,\ 3$

　したがって不等式の解は，右の図より　$\boldsymbol{x<-4,\ 3<x}$

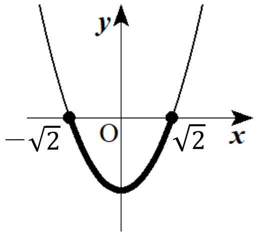


②　$2\geqq x^2$　⇒　$x^2-2\leqq 0$

　$x^2-2=0$ の解は，$x^2-2=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=0$ より

　　　$x=\pm\sqrt{2}$

　したがって不等式の解は，右の図より　$\boldsymbol{-\sqrt{2}\leqq x\leqq\sqrt{2}}$

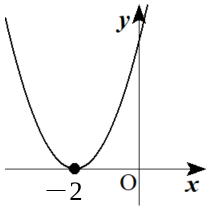


③　$x^2+4x+4\leqq 0$

　$x^2+4x+4=0$ の解は，$x^2+4x+4=(x+2)^2=0$ より

　　　$x=-2$

　したがって不等式の解は，右の図より　$\boldsymbol{x=-2}$



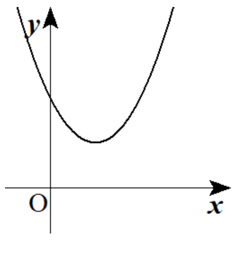
④　$x^2-2x+2<0$

　2 次関数 $y=x^2-2x+2$ のグラフは

　　　$D=(-2)^2-4\cdot1\cdot2=4-8=-4$

　よって，$D<0$ より x 軸と共有点をもたない。

　したがって　**解はない**



(2)　この連立不等式は，2 つの不等式が同時に成り立っている状況を表しているので，その解はそれぞれの不等式の解の共通部分になる。共通部分を求めるとき，数直線を利用すると求めやすくなる。

・$2x^2-7x+6\leqq 0$

　$2x^2-7x+6=0$ の解は，$2x^2-7x+6=(x-2)(2x-3)=0$ より

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & -2 & \longrightarrow & -4 \\ 2 & & -3 & \longrightarrow & -3 \\ \hline & & & & -7 \end{array}$$

　　　$x=\dfrac{3}{2},\ 2$

　したがって，不等式の解は　$\dfrac{3}{2}\leqq x\leqq 2$

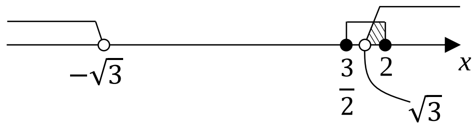
・$x^2>3$ ⇒ $x^2-3>0$

$x^2-3=0$ の解は，$x^2-3=(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=0$ より

$x=\pm\sqrt{3}$

したがって，不等式の解は　$x<-\sqrt{3}$，$\sqrt{3}<x$

右の数直線より，連立不等式の解は　$\boldsymbol{\sqrt{3}<x\leqq 2}$



１２　つねに成り立つ不等式

すべての実数 x に対して，2 次不等式 $x^2+kx+2k-3>0$ が成り立つような定数 k の値の範囲を求めよ。

要　点

「すべての実数 x に対して, 2 次不等式 $x^2+kx+2k-3>0$ が成り立つ」

ことは,「2 次関数 $y=x^2+kx+2k-3$ のグラフが x 軸より上側にある」

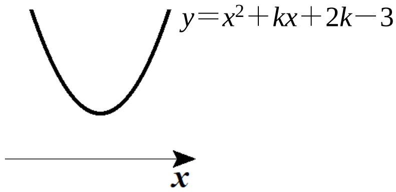
ことと同じであり,

「2 次関数 $y=x^2+kx+2k-3$ の最小値が 0 より大きい」，あるいは

「2 次関数 $y=x^2+kx+2k-3$ のグラフが x 軸と共有点をもたない」

場合を考えればよい。本問では，与えられた条件から

「2 次関数 $y=x^2+kx+2k-3$ のグラフが x 軸と共有点をもたない」場合を考える。



解答

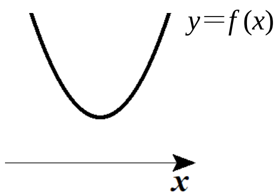
$f(x)=x^2+kx+2k-3$ とすると，$f(x)$の x^2 の係数は正であるから，

2 次関数 $y=f(x)$のグラフは下に凸である。

よって，すべての実数 x に対して $f(x)>0$ が成り立つための条件は,

$y=f(x)$のグラフがつねに x 軸より上側にある，すなわち

$y=f(x)$のグラフが x 軸と共有点をもたないことである。



したがって，2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると，$D<0$ であればよい。

ここで,

$$D=k^2-4\cdot1\cdot(2k-3)=k^2-8k+12=(k-2)(k-6)$$

であるから，$D<0$ より　$(k-2)(k-6)<0$

これを解くと　$\boldsymbol{2<k<6}$

１３　放物線と x 軸との共有点

2 次関数 $y=x^2+mx+m+8$ のグラフが次の条件を満たすように，定数 m の値の範囲を定めよ。

(1)　x 軸の正の部分で異なる 2 つの共有点をもつ。

(2)　x 軸の負の部分で異なる 2 つの共有点をもつ。

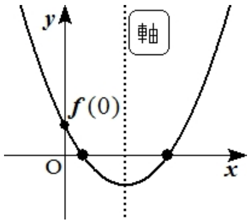
(3)　x 軸の正の部分と負の部分で共有点をもつ。

要　点

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$のグラフに対して，$f(x)=ax^2+bx+c$ とおき，2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を $D(=b^2-4ac)$とする。放物線と x 軸との共有点に関して，次のことがいえる。

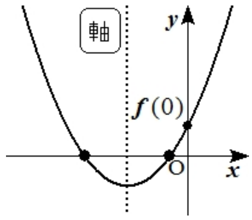
$\boxed{\text{I}}$　x 軸の正の部分で異なる 2 つの共有点をもつ

　　⇔　$D>0$，(軸の位置)>0，$f(0)>0$



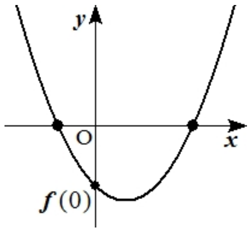
$\boxed{\text{II}}$　x 軸の負の部分で異なる 2 つの共有点をもつ

　　⇔　$D>0$，(軸の位置)<0，$f(0)>0$



$\boxed{\text{III}}$　x 軸の正の部分と負の部分で共有点をもつ

　　⇔　$f(0)<0$



コメント：下に凸の放物線が $f(0)<0$ のとき，x 軸の正の部分と負の部分の異なる 2 つの共有点をもつ。よって，$D>0$ は調べなくてよい。
また，$\boxed{\text{III}}$のとき，軸の位置は正の場合も負の場合もある。

〈注意〉x^2 の係数が負の場合，y 切片の条件が$\boxed{\text{I}}$，$\boxed{\text{II}}$ は $f(0)<0$，$\boxed{\text{III}}$ は $f(0)>0$ となる。これはグラフをかけば確かめられる。また，x^2 の係数に変数を含むタイプの問題もあるが，正負で場合分けをして条件を満たす値の範囲を求める。x^2 の係数が 0 のときは直線となり，x 軸と 2 つの共有点をもつことはない。

解答

2 次関数 $y=x^2+mx+m+8$ のグラフに対して，$f(x)=x^2+mx+m+8$ とおき，2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると　$D=m^2-4(m+8)$

(1)　$D>0$，(軸の位置)>0，$f(0)>0$　を満たせばよい。

(ⅰ)　$D>0$　すなわち　$m^2-4(m+8)>0$

$m^2-4(m+8)=0$ の解は，$m^2-4(m+8)=m^2-4m-32=(m+4)(m-8)=0$ より　$m=-4$，8

したがって　$m<-4$，$8<m$

(ⅱ)　(軸の位置)>0

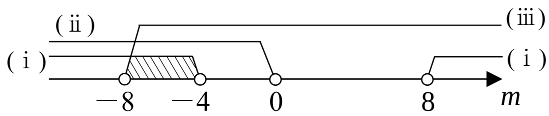
$x^2+mx+m+8=\left(x+\frac{m}{2}\right)^2-\frac{m^2}{4}+m+8$ より，軸は直線$x=-\frac{m}{2}$　　これより　$-\frac{m}{2}>0$

したがって　$m<0$

(ⅲ)　$f(0)>0$

$f(0)=m+8$ より　$m+8>0$　　したがって　$m>-8$

以上のことから，右の数直線より　$\boldsymbol{-8<m<-4}$

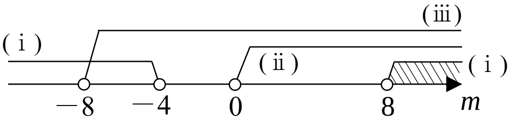


(2)　$D>0$，(軸の位置)<0，$f(0)>0$　を満たせばよい。

(ⅰ)　$D>0$　　(1)より　$m<-4$，$8<m$

(ⅱ)　(軸の位置) <0　　軸は(1)より，$x=-\dfrac{m}{2}$ であるから　$-\dfrac{m}{2}<0$　　したがって　$m>0$

(ⅲ)　$f(0)>0$　　(1)より　$m>-8$



以上のことから，右の数直線より　$\boldsymbol{m>8}$

(3)　$f(0)<0$　を満たせばよい。

$m+8<0$ より　$\boldsymbol{m<-8}$

研究　**放物線と直線**

(1)　放物線 $y=-x^2+2x+3$ と直線 $y=-2x-2$ との共有点の座標を求めよ。

(2)　b を実数とする。放物線 $y=x^2-3x+1$ と直線 $y=2x+b$ が，異なる 2 点で交わるように b の値の範囲を定めよ。

要　点

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと直線 $y=mx+n$ の共有点の x 座標は，y を消去して得られる 2 次方程式 $mx+n=ax^2+bx+c$ の実数解と一致する。放物線と直線の共有点の個数が知りたいときは，y を消去して得られる 2 次方程式の解の個数と一致するので，判別式を調べればよい。

解答

(1)　y を消去して得られる 2 次方程式 $-2x-2=-x^2+2x+3$ の解を求める。

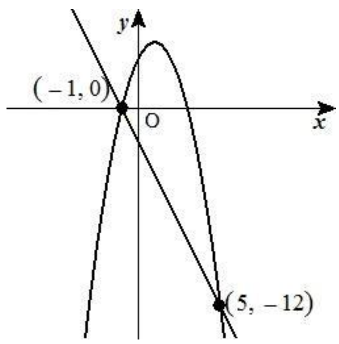
$-2x-2=-x^2+2x+3$　⇒　$x^2-4x-5=0$　⇒　$(x+1)(x-5)=0$

これを解くと　$x=-1$，5

$x=-1$ のとき　$y=-2\cdot(-1)-2=0$

$x=5$ のとき　$y=-2\cdot5-2=-12$

よって，求める共有点の座標は　$\boldsymbol{(-1,\ 0),\ (5,\ -12)}$



(2)　y を消去して得られる 2 次方程式 $2x+b=x^2-3x+1$ の実数解の個数を調べる。

$2x+b=x^2-3x+1$　⇒　$x^2-5x+1-b=0$

2 次方程式 $x^2-5x+1-b=0$ の判別式を D とすると

$$D=(-5)^2-4\cdot1\cdot(1-b)=25-4+4b=21+4b$$

$D>0$ のとき題意を満たす。したがって　$\boldsymbol{b>-\dfrac{21}{4}}$