三角関数の不定積分

例題，練習問題の結果等から，三角関数の不定積分は次のようにまとめることができる。
ただし，C は積分定数とする。

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C, \qquad \int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

$$\int \sin^3 x\,dx = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C, \qquad \int \cos^3 x\,dx = -\frac{1}{3}\sin^3 x + \sin x + C$$

$$\int \sin^4 x\,dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C, \qquad \int \cos^4 x\,dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\frac{1}{\tan x} + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$$

$$\int \tan x\,dx = -\log|\cos x| + C, \qquad \int \frac{1}{\tan x}dx = \log|\sin x| + C$$

$$\int \tan^2 x\,dx = \tan x - x + C, \qquad \int \frac{1}{\tan^2 x}dx = -\frac{1}{\tan x} - x + C$$

$\boxed{1}$

次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}dx$　　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}dx$

解答

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx$

$\cos x = t$とおくと　$-\sin x\,dx = dt$　　よって　$\displaystyle\int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx = -\int \frac{1}{1-t^2}dt$

$\displaystyle\frac{1}{1-t^2} = \frac{a}{1+t} + \frac{b}{1-t}$を満たす定数$a$，$b$を求める。$(\text{右辺}) = \displaystyle\frac{a(1-t)+b(1+t)}{(1+t)(1-t)} = \frac{(-a+b)t+a+b}{1-t^2}$

$\begin{cases} -a+b=0 \\ a+b=1 \end{cases}$　　これを解くと　$a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1}{2}$　　したがって　$\displaystyle\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right)$

これから　$\displaystyle -\int \frac{1}{1-t^2}dt = -\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right)dt = -\frac{1}{2}(\log|1+t| - \log|1-t|) + C$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C$$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx$

$\sin x = t$とおくと　$\cos x\, dx = dt$　　よって　$\displaystyle\int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx = \int \frac{1}{1-t^2}dt$

(1)から　$\displaystyle\int \frac{1}{1-t^2}dt = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt = \frac{1}{2}(\log|1+t|-\log|1-t|)+C$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+C}$$

〈注意〉(1)　$\sin x \neq 0$ であり，$1-\cos x \geqq 0$，$1+\cos x \geqq 0$ であるから　$\left|\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$

(2)　$\cos x \neq 0$ であり，$1+\sin x \geqq 0$，$1-\sin x \geqq 0$ であるから　$\left|\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| = \dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$

$\boxed{2}$

不定積分$\displaystyle\int e^x \cos x\, dx$を求めよ。

解答

$I = \displaystyle\int e^x \cos x\, dx$とする。

$$I = \int (e^x)'\cos x\, dx = e^x\cos x - \int e^x\cdot(\cos x)'\, dx = e^x\cos x - \int e^x\cdot(-\sin x)\, dx$$

$$= e^x\cos x + \int (e^x)'\sin x\, dx = e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x\cdot(\sin x)'\, dx$$

$$= e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x\cos x\, dx = e^x\cos x + e^x\sin x - I$$

Iは不定積分であるから，積分定数も考慮して

$$I = \boldsymbol{\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)+C}$$

$\boxed{3}$

(1)　$\tan\dfrac{x}{2} = t$とおくと，$\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$，$\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$となり，$\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1+t^2}{2}$となることを確かめよ。

(2)　$\tan\dfrac{x}{2} = t$とおくことで，$\displaystyle\int\frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$を導け。

解答

(1)　$\tan\dfrac{x}{2}=t$より　$\tan x=\tan\left(2\cdot\dfrac{x}{2}\right)=\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}=\dfrac{2t}{1-t^2}$

また，$1+\tan^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$から　$\cos^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\dfrac{1}{1+t^2}$

これから　$\cos x=\cos\left(2\cdot\dfrac{x}{2}\right)=2\cos^2\dfrac{x}{2}-1=\dfrac{2}{1+t^2}-1=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

$$\sin x=\tan x\cos x=\frac{2t}{1-t^2}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\frac{dt}{dx}=\left(\tan\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{\frac{1}{1+t^2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1+t^2}{2}$$

(2)　$\tan\dfrac{x}{2}=t$とおくと，(1)より　$\dfrac{1}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2}=\left(\dfrac{1+t^2}{1-t^2}\right)^2$，$dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt$であるから

$$\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)^2\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=2\int\frac{1+t^2}{(1-t^2)^2}dt=2\int\frac{1+t^2}{(1+t)^2(1-t)^2}dt$$

$\dfrac{1+t^2}{(1+t)^2(1-t)^2}=\dfrac{a}{(1+t)^2}+\dfrac{b}{(1-t)^2}$を満たす定数$a$，$b$を求める。

$$(\text{右辺})=\frac{a(1-t)^2+b(1+t)^2}{(1+t)^2(1-t)^2}=\frac{(a+b)t^2+2(-a+b)t+a+b}{(1+t)^2(1-t)^2}$$

$\begin{cases}a+b=1\\-a+b=0\end{cases}$　これを解くと　$a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1}{2}$

よって　$2\displaystyle\int\frac{1+t^2}{(1+t)^2(1-t)^2}dt=2\int\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{1}{(1-t)^2}\right\}dt=\int\left\{\frac{1}{(t+1)^2}+\frac{1}{(t-1)^2}\right\}dt$

$$=\frac{1}{-2+1}(t+1)^{-2+1}+\frac{1}{-2+1}(t-1)^{-2+1}+C$$

$$=-\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}+C=-\frac{t-1+(t+1)}{(t+1)(t-1)}+C=-\frac{2t}{t^2-1}+C$$

$$=\frac{2t}{1-t^2}+C=\tan x+C$$

〈注意〉$\boxed{3}$ (1)から，三角関数の不定積分は，分数関数の不定積分に置き換えることができる。