1　絶対値が 1 で，$z^2+z$ が実数であるような複素数 $z$ を求めよ。
（15 点）

## 解答

$z$の絶対値は 1 なので，$|z|=1$ から　$z\overline{z}=1$　……①

また，$z^2+z$ が実数であるので

$$z^2+z=\overline{z^2+z}\qquad \text{すなわち}\qquad z^2+z=(\overline{z})^2+\overline{z}\quad \cdots\cdots②$$

が成り立つ。

①より　$\overline{z}=\dfrac{1}{z}$　　これを②に代入すると　$z^2+z=\left(\dfrac{1}{z}\right)^2+\dfrac{1}{z}$

整理すると

$$z^4+z^3-z-1=0$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | −1 | −1 |
| | | 1 | 2 | 2 | 1 |
| | 1 | 2 | 2 | 1 | 0 |

$$(z-1)(z^3+2z^2+2z+1)=0$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| −1 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| | | −1 | −1 | −1 |
| | 1 | 1 | 1 | 0 |

$$(z-1)(z+1)(z^2+z+1)=0$$

これを解いて　$\boldsymbol{z=1,\ -1,}\ \dfrac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\boldsymbol{\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}}$

2　次の極限値を求めよ。　（(1), (2) 各 15 点, 計 30 点）

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sin 3x-3\sin x}$

## 解答

(1)　$\cos x-\cos 2x$

$=\cos x-(2\cos^2 x-1)$

$=-2\cos^2 x+\cos x+1$

$=-(2\cos^2 x-\cos x-1)$

$=-(\cos x-1)(2\cos x+1)$

$=(1-\cos x)(2\cos x+1)$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | −1 | → | −2 |
| 2 | 1 | → | 1 |
| | | | −1 |

であるから

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(2\cos x+1)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)(2\cos x+1)}{x^2(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos^2 x)(2\cos x+1)}{x^2(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\,(2\cos x+1)}{x^2(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{2\cos x+1}{1+\cos x}$$

$$=1^2\cdot\frac{2\cdot 1+1}{1+1}=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

(2)　$\sin 3x=\sin(x+2x)=\sin x\cos 2x+\cos x\sin 2x$

$=\sin x(1-2\sin^2 x)+\cos x\cdot 2\sin x\cos x$

$=\sin x-2\sin^3 x+2\sin x\cos^2 x$

$=\sin x-2\sin^3 x+2\sin x(1-\sin^2 x)$

$=\sin x-2\sin^3 x+2\sin x-2\sin^3 x$

$=-4\sin^3 x+3\sin x$

であるから

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sin 3x-3\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{-4\sin^3 x+3\sin x-3\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{-4\sin^3 x}$$

$$=-\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^3$$

$$=-\boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

3　関数$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ $(x>0)$ について，次の問いに答えよ。

((1)，(2) 各 15 点，計 30 点）

(1)　関数$y=f(x)$のグラフの概形をかけ。

ただし，$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ を用いてよい。

(2)　(1)の結果を用いて，$e^{\pi}$ と $\pi^{e}$ の大小を比較せよ。

## 解答

(1)　$f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\log x\cdot 1}{x^2}=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-(1-\log x)\cdot 2x}{x^4}=\frac{-x-2x+2x\log x}{x^4}$$

$$=\frac{-3+2\log x}{x^3}$$

$f'(x)=0$ とすると，$1-\log x=0$ から　$x=e$

$f''(x)=0$ とすると，$-3+2\log x=0$ から　$\log x=\dfrac{3}{2}$

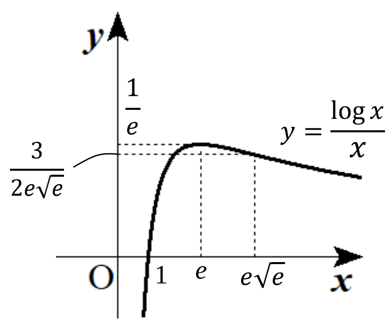
よって　$x=e^{\frac{3}{2}}=e\sqrt{e}$

以上から，$x>0$ における増減表は次のようになる。

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $e$ | $\cdots$ | $e\sqrt{e}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | ＋ | 0 | － | － | － |
| $f''$ | | － | － | － | 0 | ＋ |
| $f$ | | ↗ | $\dfrac{1}{e}$ | ↘ | $\dfrac{3}{2e\sqrt{e}}$ | ↘ |

$\lim_{x\to+0}f(x)=-\infty$，$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ であるから，

グラフは次の図のようになる。




(2)　(1)より，$x>0$ における$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$は，$x=e$のとき

最大値をとるので　$f(e)>f(\pi)$

すなわち　$\dfrac{\log e}{e}>\dfrac{\log \pi}{\pi}$

変形すると　$\pi\log e>e\log\pi$　　$\log e^{\pi}>\log\pi^{e}$

したがって　$\boldsymbol{e^{\pi}>\pi^{e}}$

4　次の問いに答えよ。　　((1) 10 点，(2) 15 点，計 25 点）

(1)　$x=2\cos^2\theta$，$y=2\sin\theta\cos\theta$ のように媒介変数表示された曲線は，どのような図形を表すか。

(2)　曲線$x=2\cos^2\theta$，$y=2\sin\theta\cos\theta$ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}\right)$ の長さ$L$を求めよ。

## 解答

(1)　$x=2\cos^2\theta=(2\cos^2\theta-1)+1=\cos2\theta+1$，

$y=2\sin\theta\cos\theta=\sin2\theta$　であるので

$x=\cos2\theta+1$ から　$\cos2\theta=x-1$，

$y=2\sin\theta\cos\theta$ から　$\sin2\theta=y$

これらを，$\sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta=1$ に代入すると

$(x-1)^2+y^2=1$

よって，**中心(1，0)，半径 1 の円**を表す。

(2)　$x=\cos2\theta+1$ より　$\dfrac{dx}{d\theta}=2\cdot(-\sin2\theta)=-2\sin2\theta$，

$y=\sin2\theta$ より　$\dfrac{dy}{d\theta}=2\cos2\theta$

であるから

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{(-2\sin2\theta)^2+(2\cos2\theta)^2}\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{4(\sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta)}\,d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta=2\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\boldsymbol{\frac{2}{3}\pi}$$