Math-Aquarium【実力テスト＋解答】数学Ⅲ(C) 実力テスト（標準）

$\boxed{\text{出題範囲}}$：複素数平面，式と曲線，極限，微分法，積分法

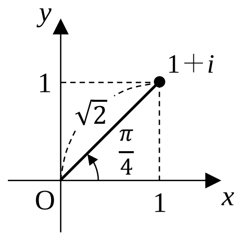
$\boxed{1}$　次の問いに答えよ。　　　　　((1), (2) 各 10 点, 計 20 点)

(1)　$\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^6$ を計算せよ。

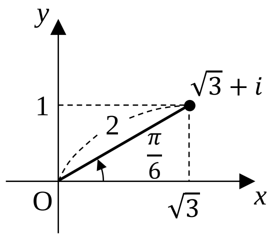
(2)　方程式 $z^3=-i$ を解け。

解答

(1)　$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$



$\sqrt{3}+i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$



よって

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^6=\left\{\frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}\right\}^6$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6\cdot\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right\}^6$$

$$=\frac{8}{64}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^6$$

$$=\frac{1}{8}\left(\cos\frac{6}{12}\pi+i\sin\frac{6}{12}\pi\right)=\frac{1}{8}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{8}i}$$

(2)　$r>0$，$0\leqq\theta<2\pi$ として，$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと，ド・モアブルの定理により

$z^3=r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)$

また，$-i$の極形式は　$-i=\cos\dfrac{3}{2}\pi+i\sin\dfrac{3}{2}\pi$

よって　$r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)=\cos\dfrac{3}{2}\pi+i\sin\dfrac{3}{2}\pi$

ここで，$-i$の偏角は$\dfrac{3}{2}\pi+2k\pi$ (kは整数) であるから，

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$r^3=1$，$3\theta=\dfrac{3}{2}\pi+2k\pi$ (kは整数)

$r>0$ であるから　$r=1$　　また　$\theta=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{2}{3}k\pi$

$0\leqq\theta<2\pi$の範囲で考えると　$k=0$，1，2

したがって，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{7}{6}\pi$，$\dfrac{11}{6}\pi$ であるから，求める解は

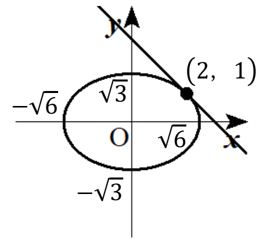
$$z=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2},\quad \cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi,\quad \cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi$$

すなわち　$\boldsymbol{z=i,\ \dfrac{-\sqrt{3}-i}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}-i}{2}}$

$\boxed{2}$　楕円 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 上の点$(2,\ 1)$に

おける接線の方程式について，y 軸に平行な直線は接線にはならないので，傾きを m として　$y-1=m(x-2)$ とおくことができる。

このとき，m の値を求めよ。　(20 点)



解答

接線の方程式　$y=m(x-2)+1$　を

楕円の方程式　$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$　に代入すると

$$\frac{x^2}{6}+\frac{\{m(x-2)+1\}^2}{3}=1$$

$x^2+2\{m^2(x-2)^2+2m(x-2)+1\}=6$

$x^2+2m^2(x^2-4x+4)+4m(x-2)+2=6$

$x^2+2m^2x^2-8m^2x+8m^2+4mx-8m+2=6$

$(2m^2+1)x^2+(-8m^2+4m)x+8m^2-8m-4=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると，$D=0$ となるから

$D=(-8m^2+4m)^2-4(2m^2+1)(8m^2-8m-4)$

$=64m^4-64m^3+16m^2-4(16m^4-16m^3-8m^2+8m^2-8m-4)$

$=64m^4-64m^3+16m^2$

$\qquad -64m^4+64m^3+32m^2-32m^2+32m+16$

$=16m^2+32m+16=16(m+1)^2=0$

よって　$\boldsymbol{m=-1}$

$\boxed{\text{参考}}$　$m=-1$ を　$y=m(x-2)+1$　に代入すると

$y=-(x-2)+1=-x+3$

$y=-x+3$ を変形すると　$x+y=3$　　　$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{3}=1$

$\dfrac{2x}{6}+\dfrac{1\cdot y}{3}=1$

一般に，楕円$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点$(x_1,\ y_1)$における

接線の方程式は　$\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$　と表すことができる。

出題範囲：複素数平面，式と曲線，極限，微分法，積分法

3 関数$f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}-ax^n+a}{x^n-2}$が$x\geqq 0$において連続になるように定数$a$の値を定めよ。（20 点）

解答

$x>1$ のとき

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x-a+\dfrac{a}{x^n}}{1-\dfrac{2}{x^n}}=\frac{x-a+0}{1-0}=x-a$$

$x=1$ のとき

$$f(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1^{n+1}-a\cdot 1^n+a}{1^n-2}=\frac{1-a+a}{1-2}=-1$$

$0\leqq x<1$ のとき

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}-ax^n+a}{x^n-2}=\frac{0-a\cdot 0+a}{0-2}=-\frac{a}{2}$$

$f(x)$は $0\leqq x<1$，$1<x$ において連続である。
よって，$f(x)$が $x\geqq 0$ において連続になるための条件は，$x=1$ で連続であることである。

ここで　$\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1-0}\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-\dfrac{a}{2}$

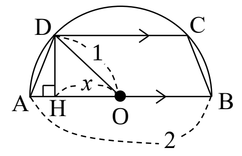
$\lim_{x\to 1+0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}(x-a)=1-a$

であり，$f(1)=-1$ であるから

$$-\frac{a}{2}=-1 \quad \text{かつ} \quad 1-a=-1$$

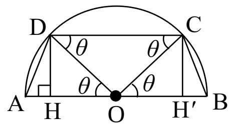
を満たせばよい。したがって　$\boldsymbol{a=2}$

4 中心を O とし，直径 AB の長さが 2 である半円がある。
この半円に，右の図のような線分 AB を下底とする台形ABCDを内接させ，OH$=x$ とおくとき，台形 ABCD の面積の最大値とそのときの x の値を求めよ。（20 点）



解答

$0<x<1$ である。
$\angle$AOD$=\theta$ とおくと
DC // AB，OD＝OC であるから
$\angle$AOD＝$\angle$ODC＝$\angle$OCD＝$\angle$COB＝θ
ここで点 C から辺 AB に垂線 CH′ を引いたとき，OD＝OC＝1 であるから



$$x=\mathrm{OH}=\frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OD}}=\cos\theta=\frac{\mathrm{OH'}}{\mathrm{OC}}=\mathrm{OH'}$$

よって　HH′＝$2x$
四角形 HH′CD は長方形であるから　DC＝$2x$
また，$\mathrm{DH}=\sqrt{1-x^2}$ より，台形 ABCD の面積Sは

$$S=\frac{1}{2}(\mathrm{DC}+\mathrm{AB})\cdot\mathrm{DH}=\frac{1}{2}(2x+2)\cdot\sqrt{1-x^2}$$
$$=(x+1)\sqrt{1-x^2}$$
$$S'=\sqrt{1-x^2}+(x+1)\cdot\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)$$
$$=\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2-x(x+1)}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-x^2-x^2-x}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$=-\frac{2x^2+x-1}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{(x+1)(2x-1)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$0<x<1$ において，$S'=0$ となるのは　$x=\dfrac{1}{2}$

右の増減表より，台形 ABCD の面積の最大値は

$$\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{4}}$$

そのときのxの値は

$$\boldsymbol{x=\frac{1}{2}}$$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
S'		＋	0	−	
S		↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	

$S=(x+1)\sqrt{1-x^2}$
に$x=\dfrac{1}{2}$を代入すると
$$\left(\frac{1}{2}+1\right)\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$
$$=\frac{3}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

5 次の定積分を求めよ。　　　　((1), (2) 各 10 点, 計 20 点)

(1) $\displaystyle\int_1^e \frac{\log x}{x}dx$　　　　(2) $\displaystyle\int_1^3 \frac{\log x}{x^2}dx$

解答

(1) $\log x = t$ とおくと

$$\frac{1}{x}dx = dt$$

x と t の対応は右のようになる。

x	$1 \longrightarrow e$
t	$0 \longrightarrow 1$

よって　$\displaystyle\int_1^e \frac{\log x}{x}dx = \int_0^1 t \cdot dt$

$$= \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

(2) $\displaystyle\int_1^3 \frac{\log x}{x^2}dx = \int_1^3 \left(-\frac{1}{x}\right)' \log x\, dx$

$$= \left[-\frac{1}{x}\log x\right]_1^3 - \int_1^3 \left(-\frac{1}{x}\right) \cdot (\log x)'\, dx$$

$$= -\frac{\log 3}{3} + \int_1^3 \frac{1}{x^2}dx$$

$$= -\frac{\log 3}{3} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^3$$

$$= -\frac{\log 3}{3} + \left(-\frac{1}{3} + 1\right)$$

$$= \mathbf{-\frac{\log 3}{3} + \frac{2}{3}}$$