Math-Aquarium【実力テスト＋解答】数学ⅡB(C) 実力テスト（応用）

出題範囲：図形と方程式，微分と積分，数列，統計的な推測，ベクトル

1 次の問いに答えよ。 ((1)～(3) 各 10 点, 計 30 点)

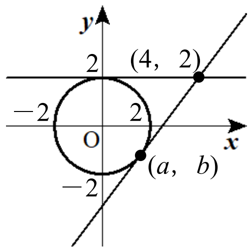
(1) 点(4，2)を通り，円 $x^2+y^2=4$ に接する直線の方程式を求めよ。

(2) 直線 $x+y=1$ が円 $x^2+y^2=4$ によって切りとられる弦の長さを求めよ。

(3) x，y が 4 つの不等式 $x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$2x+3y\leqq 25$，$3x+y\leqq 13$ を満たすとき，$x+y$ の最大値と最小値を求めよ。
また，そのときの x，y の値を求めよ。

解答

(1) 円と直線の接点を$(a，b)$とおくと，



接線の方程式は $ax+by=4$ ……①

これが点(4，2)を通るから

$4a+2b=4$

すなわち $2a+b=2$ ……②

また，点$(a，b)$は円上の点であるから

$a^2+b^2=4$ ……③

②より $b=2-2a$ であるから，これを①に代入すると

$a^2+(2-2a)^2=4$　　$a^2+4-8a+4a^2=4$

$5a^2-8a=0$　　$a(5a-8)=0$

よって $a=0，\dfrac{8}{5}$

②から $a=0$ のとき $b=2$

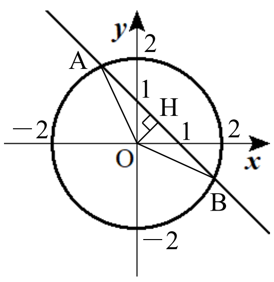
$a=\dfrac{8}{5}$ のとき $b=2-\dfrac{16}{5}=-\dfrac{6}{5}$

したがって，①から，求める直線の方程式は

$2y=4$ すなわち $\boldsymbol{y=2,}$

$\dfrac{8}{5}x-\dfrac{6}{5}y=4$ すなわち $\boldsymbol{4x-3y=10}$

(2) 円と直線の交点を，右の図のように A，B とする。



円 $x^2+y^2=4$ の中心は原点 O(0，0) であり，O から直線 $x+y=1$ に引いた垂線と直線 $x+y=1$ との交点を H とする。

OA，OB は円の半径であるから

OA＝OB＝2

また，点と直線の距離の公式から

点(0，0)と 直線 $x+y-1=0$ の 距離

$$\mathrm{OH}=\frac{|0+0-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって，三平方の定理により

$$\mathrm{AH}=\sqrt{2^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{4-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{7}{2}}=\frac{\sqrt{14}}{2}$$

求める弦の長さは，線分 AB の長さであるから

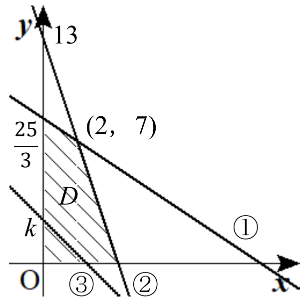
$$\mathrm{AB}=2\mathrm{AH}=2\cdot\frac{\sqrt{14}}{2}=\boldsymbol{\sqrt{14}}$$

(3) 与えられた連立不等式の表す領域を D とする。

$\begin{cases}2x+3y=25 & \cdots\cdots① \\ 3x+y=13 & \cdots\cdots②\end{cases}$ とおく。②より $y=-3x+13$ であるから，これを①に代入すると $2x+3(-3x+13)=25$

$-7x=25-39$ よって $x=2$ ②から $y=7$

①を変形すると $y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{25}{3}$



であり，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ も合わせて考えると，D は右の図の斜線部分である。

ここで，$x+y=k$ ……③ とおくと $y=-x+k$ と変形できるから，③は傾き−1，y 切片が k の直線を表す。

この直線③が領域 D と共有点をもつような k の値の最大値と最小値を求めればよい。

図から，k は③が点(2，7)を通るとき最大となり，点(0，0)を通るとき最小となる。

よって，$x+y$ は，$\boldsymbol{x=2，y=7}$ **のとき最大値** $2+7=\boldsymbol{9}$，

$\boldsymbol{x=0，y=0}$ **のとき最小値** $0+0=\boldsymbol{0}$ をとる。

2 $a_1=1，a_{n+1}=\dfrac{(a_n)^2+2n+1}{a_n+1}$ $(n=1，2，3，\cdots\cdots)$

で定義される数列$\{a_n\}$について，次の問いに答えよ。

((1) 9 点，(2) 10 点，計 19 点)

(1) a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(2) a_n を n で表す式を推測し，それを数学的帰納法で証明せよ。

解答

(1) $a_1=1，a_{n+1}=\dfrac{(a_n)^2+2n+1}{a_n+1}$ より

$$\boldsymbol{a_2}=\frac{(a_1)^2+2\cdot 1+1}{a_1+1}=\frac{1^2+2+1}{1+1}=\frac{4}{2}=\boldsymbol{2},$$

$$\boldsymbol{a_3}=\frac{(a_2)^2+2\cdot 2+1}{a_2+1}=\frac{2^2+4+1}{2+1}=\frac{9}{3}=\boldsymbol{3},$$

$$\boldsymbol{a_4}=\frac{(a_3)^2+2\cdot 3+1}{a_3+1}=\frac{3^2+6+1}{3+1}=\frac{16}{4}=\boldsymbol{4}$$

(2) (1)より， $\boldsymbol{a_n=n}$ と推測できる。

$a_n=n$ ……① とする。

(ⅰ) $n=1$ のとき

$a_1=1$ より，①は成り立つ。

(ⅱ) $n=k$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$a_k=k$ ……②

$n=k+1$ のときを考えると

②から $a_k=k$ を代入

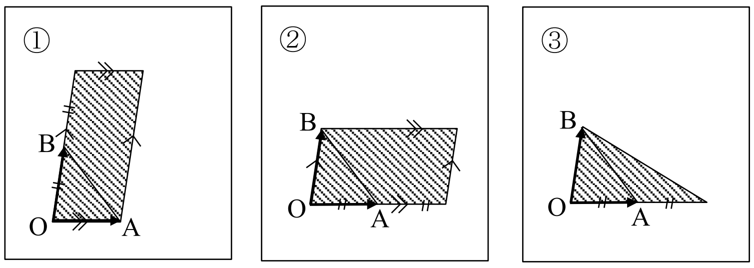
$$a_{k+1}=\frac{(a_k)^2+2k+1}{a_k+1}$$

$$=\frac{k^2+2k+1}{k+1}=\frac{(k+1)^2}{k+1}=k+1$$

よって，$n=k+1$ のときも①は成り立つ。

(ⅰ)，(ⅱ)から，すべての自然数 n について①が成り立つ。

3　△ABC に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$とする。実数$s$，$t$が条件 $0 \leqq s \leqq 2$，$0 \leqq t \leqq 1$ を満たしながら動くとき，点 P の存在範囲を示した図を，次の中から選べ。　（計 10 点）

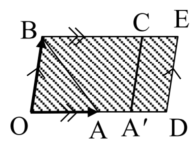


解答

sを固定して，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}}$とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA'}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

ここで，t を $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲で変化させると，点 P は右の図の線分 A′C 上を動く。ただし　$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OA'}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}$



次に，s を $0 \leqq s \leqq 2$ の範囲で変化させると，線分 A′C は図の線分 OB から DE まで平行に動く。

ただし　$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}$

よって，点 P の存在範囲は

$2\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}}$，　$2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OE}}$とすると，

平行四辺形 ODEB の周と内部

であるから，**②**　である。

4　今日の対戦相手のピッチャーは，これまでのデータからストレートが全投球の 60%を占めることがわかっている。ところが今日の試合では，初回から 4 回までの 50 球のうちストレートは 23 球であった。今日のストレートの占める割合は 60%より小さいと判断してよいか。有意水準 4%で検定せよ。ただし，50 球はデータとして十分大きいとしてよく，確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$に従うとき，$P(Z \leqq -\sqrt{3}) = 0.04$ としてよいものとする。　（計 15 点）

解答

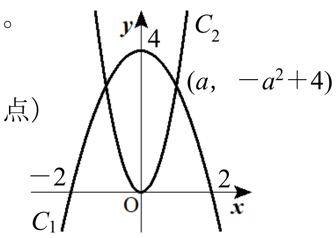
仮説を「対戦相手のピッチャーは，今日もストレートが全投球の 60%を占める。」とする。

試合における 50 球のうちのストレートの球数を X 球とおくと，標本平均 $\bar{X}$ は，$N(50 \times 0.6,\ 50 \times 0.6 \times 0.4)$，すなわち $N(30,\ 12)$ に従うとしてよい。ここで　$Z = \dfrac{\bar{X} - 30}{\sqrt{12}}$ とおくと，確率変数 Z の信頼度 96%の信頼区間は，$Z \geqq -\sqrt{3}$であるから

$$\frac{\bar{X} - 30}{\sqrt{12}} \geqq -\sqrt{3} \qquad \text{よって} \quad \bar{X} \geqq 24$$

観測されたストレートの球数は 23 球であり，この区間に入らないので，仮説は棄却される。したがって，有意水準 4%では，この日のストレートの占める割合は，**60%より小さいと判断できる。**

5　放物線 $y = -x^2 + 4$ を C_1 とする。次の問いに答えよ。
（(1) 6 点，(2) 小問各 10 点，計 26 点）



(1)　C_1 と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(2)

先生　：右上の図のような原点を通る放物線を C_2 として，C_2 と C_1 で囲まれた部分の面積が(1)の面積の半分になるような C_2 を考えてみよう。
M さん：C_2 は原点を通る放物線だから，その方程式は $y = kx^2$　（k は実数）とおけるね。
A さん：C_1 と C_2 の第 1 象限の交点は C_1 上の点だから，a を正の実数として，$(a,\ -a^2 + 4)$ とおけるね。

①　C_2 を表す方程式を，A さんが言った a を用いて表せ。
②　C_2 と C_1 で囲まれた部分の面積が，(1)の面積の半分になるような a の値を求めよ。

解答

(1)　求める面積を S とすると

$$S = \int_{-2}^{2} (-x^2 + 4)\,dx = 2\left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x\right]_0^2$$

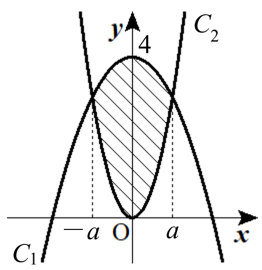
$$= 2\left(-\frac{8}{3} + 8\right) = 2 \cdot \frac{16}{3} = \boldsymbol{\frac{32}{3}}$$

(2)　①　放物線 $y = kx^2$ が点$(a,\ -a^2 + 4)$を通るから

$$-a^2 + 4 = ka^2 \qquad k\text{について解くと} \quad k = \frac{-a^2 + 4}{a^2}$$

よって　$\boldsymbol{y = \dfrac{-a^2 + 4}{a^2}x^2}$

②　Sの半分は$\dfrac{16}{3}$であるから，C_2 と C_1 で囲まれた部分の面積が$\dfrac{16}{3}$になればよい。



よって　$$\frac{16}{3} = \int_{-a}^{a} \left\{(-x^2 + 4) - \frac{-a^2 + 4}{a^2}x^2\right\} dx$$

$$= 2\int_0^a \left\{\left(-1 - \frac{-a^2 + 4}{a^2}\right)x^2 + 4\right\} dx$$

$$= 2\int_0^a \left(\frac{-a^2 + a^2 - 4}{a^2}x^2 + 4\right) dx$$

$$= 2\int_0^a \left(-\frac{4}{a^2}x^2 + 4\right) dx$$

$$= 2\left[-\frac{4}{3a^2}x^3 + 4x\right]_0^a = 2\left(-\frac{4}{3}a + 4a\right)$$

$$= 2 \cdot \frac{8}{3}a = \frac{16}{3}a$$

したがって　$\dfrac{16}{3} = \dfrac{16}{3}a$を解くと　$\boldsymbol{a = 1}$