出題範囲：複素数と方程式，微分と積分，数列，統計的な推測

1 x の 3 次方程式 $x^3+ax^2+bx-12=0$ の解のうち，1 つは -3 で，他の 2 つの解の和は -8 であるとき，定数 a，b の値を求めよ。また，-3 以外の 2 つの解を求めよ。（20 点）

解答

次の組立除法により

$x^3+ax^2+bx-12=(x+3)\{x^2+(a-3)x+b-3a+9\}+9a-3b-39$

$$
\begin{array}{r|cccc}
-3 & 1 & a & b & -12 \\
 & & -3 & -3(a-3) & -3(b-3a+9) \\
\hline
 & 1 & a-3 & b-3(a-3) & -12-3(b-3a+9) \\
 & & & =b-3a+9 & =9a-3b-39
\end{array}
$$

$x=-3$ は解であるから　$9a-3b-39=0$

すなわち　$3a-b-13=0$　……①

また，$x^2+(a-3)x+b-3a+9=0$ の 2 つの解を α，β とすると

$\alpha+\beta=-8$ であるから　$-\dfrac{a-3}{1}=-8$　　すなわち　$a=11$

これを①に代入すると　$33-b-13=0$ より　$b=20$

以上より，

$x^3+11x^2+20x-12$

$=(x+3)(x^2+8x-4)$

であるから，

$a-3=11-3=8$，
$b-3a+9=20-33+9$
$=-4$

-3 以外の 2 つの解は

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{64-4\cdot(-4)}}{2}=\frac{-8\pm\sqrt{80}}{2}=\frac{-8\pm4\sqrt{5}}{2}=-4\pm2\sqrt{5}$$

答　**$a=11$，$b=20$，-3以外の2つの解は　$-4\pm2\sqrt{5}$**

2 t を実数として，2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$を $f(x)=x^3-6x+t$，$g(x)=-x^2-x-2$ とするとき，次の問いに答えよ。

（(1)，(2) 各 15 点，計 30 点）

(1) $x\geqq0$ において，つねに $f(x)\geqq g(x)$となる t の値の範囲を求めよ。

(2) $x_1\geqq0$，$x_2\geqq0$ であるすべての x_1，x_2 の組について，$f(x_1)\geqq g(x_2)$となる t の値の範囲を求めよ。

解答

(1) $h(x)=f(x)-g(x)$とすると，$x\geqq0$ においてつねに $h(x)\geqq0$ となる t の値の範囲を求めればよい。

$h(x)=f(x)-g(x)=(x^3-6x+t)-(-x^2-x-2)$

$=x^3+x^2-5x+t+2$

$h'(x)=3x^2+2x-5$

$=(x-1)(3x+5)$

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & \times & -1 & \longrightarrow & -3 \\
3 & & 5 & \longrightarrow & 5 \\
\hline
 & & & & 2
\end{array}
$$

$x\geqq0$ において，$h'(x)=0$ とすると　$x=1$

増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$		↘	$t-1$	↗

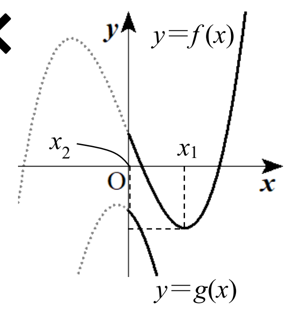
よって，$x\geqq0$ のとき，$h(x)$の最小値は $t-1$ であるから，$t-1\geqq0$ であれば，$h(x)$は $x\geqq0$ においてつねに $h(x)\geqq0$ となる。したがって　**$t\geqq1$**

(2) 題意を満たすためには，次のような関係が成り立てばよい。

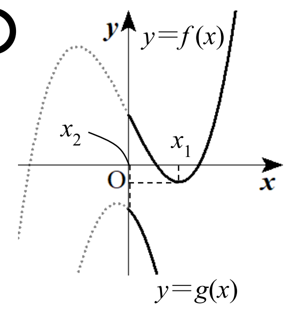
（$x\geqq0$ における $f(x)$の最小値）

$\geqq$（$x\geqq0$ における $g(x)$の最大値）

×



○



(ⅰ) $x\geqq0$ における $f(x)$の最小値

$f(x)=x^3-6x+t$

$f'(x)=3x^2-6$

$=3(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$x\geqq0$ において，$f'(x)=0$ とすると　$x=\sqrt{2}$

増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-4\sqrt{2}+t$	↗

$2\sqrt{2}-6\sqrt{2}+t$
$=-4\sqrt{2}+t$

よって，$x\geqq0$ における $f(x)$の最小値は

$-4\sqrt{2}+t$

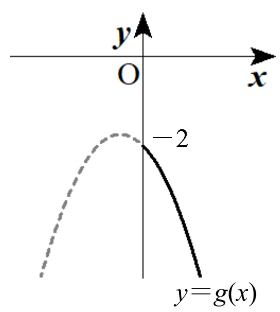
(ⅱ) $x\geqq0$ における $g(x)$の最大値

$g(x)=-x^2-x-2=-(x^2+x)-2$

$$=-\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}-2$$

$$=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}-2$$

$$=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{4}$$



右の図から，$x\geqq0$ における $g(x)$の最大値は　-2

(ⅰ)，(ⅱ)より，$-4\sqrt{2}+t\geqq-2$ となればよい。

したがって　**$t\geqq4\sqrt{2}-2$**

3 数列 $\frac{1}{1}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{4}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{4}{4}$，$\frac{1}{5}$，…
について，初項から第 70 項までの和を求めよ。（25 点）

解答

分母が等しいものを群として，次のように分ける。

$$\frac{1}{1}\ \Big|\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{2}\ \Big|\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{3}\ \Big|\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{4}\ \Big|\ \frac{1}{5},\ \cdots$$

第 1 群から第 n 群までの項数は

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

第 70 項が第 n 群に含まれるとすると

$$\frac{1}{2}(n-1)n<70\leqq\frac{1}{2}n(n+1)$$

すなわち　$n(n-1)<140\leqq n(n+1)$　……①

$12\times11=132$，　$12\times13=156$

であるから，①を満たす自然数 n は　$n=12$

よって，第 70 項は第 12 群に含まれる。

ここで，第 11 群までの項数は

$$1+2+3+\cdots\cdots+11=\frac{1}{2}\cdot11\cdot12=66$$

したがって，第 70 項は第 12 群の 4 番目の数 $\frac{4}{12}$ である。

第 n 群に含まれるすべての数の和は

$$\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\cdots\cdots+\frac{n}{n}=\frac{1}{n}(1+2+3+\cdots\cdots+n)$$
$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{2}(n+1)$$

以上から，求める初項から第 70 項までの和 S は

$$S=\sum_{k=1}^{11}\frac{1}{2}(k+1)+\frac{1}{12}+\frac{2}{12}+\frac{3}{12}+\frac{4}{12}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot11\cdot12+\frac{1}{2}\cdot11+\frac{1+2+3+4}{12}$$
$$=33+\frac{11}{2}+\frac{5}{6}=\frac{198+33+5}{6}=\frac{236}{6}=\boldsymbol{\frac{118}{3}}$$

4

M さん：血液型のうち AB 型の割合の，信頼度 95%の調査を頼まれたんだけど，条件が付いていて…
A さん：どんな？
M さん：信頼区間の幅を 6%以下にしなければいけなくて。。
A さん：標本の大きさ n が十分大きくて，標本比率が $\bar{p}$ のとき，母比率 p に対する信頼区間は，信頼度 95%では

$$\bar{p}-1.96\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}\leqq p\leqq\bar{p}+1.96\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

だったね。
M さん：うん。AB 型の割合は 10%としてよい，ってことだから，$\bar{p}=0.1$ として，n の最小値を求めて，その人数だけ調査をすればよさそうだね。

上の会話文における，n の最小値を求めよ。（25 点）

解答

信頼区間の幅は

$$\bar{p}+1.96\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}-\left\{\bar{p}-1.96\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}\right\}=3.92\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

これが 6%以下になるには，

$$3.92\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}\leqq0.06$$

を満たせばよい。

$\bar{p}=0.1$ を代入すると

$$(\text{左辺})=3.92\sqrt{\frac{0.3(1-0.1)}{n}}=3.92\sqrt{\frac{0.1\cdot0.9}{n}}=\frac{3.92\times0.3}{\sqrt{n}}$$
$$=\frac{1.176}{\sqrt{n}}$$

$\sqrt{n}>0$ であるから，両辺に $\sqrt{n}$ を掛けると

$$1.176\leqq0.06\sqrt{n}\qquad\frac{1.176}{0.06}\leqq\sqrt{n}$$

$$\frac{1176}{60}\leqq\sqrt{n}\qquad\frac{98}{5}\leqq\sqrt{n}$$

両辺を 2 乗すると　$\frac{9604}{25}\leqq n$

$9604\div25=384.15$ であるから，$\frac{9604}{25}\leqq n$ を満たす自然数 n は

385