1 次の問いに答えよ。　　　((1), (2) 各 8 点，計 16 点)

(1) 次の等式が x についての恒等式であるとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

$$x^3+5=4+a(x+b)+c(x+1)(x-2)+(x+1)(x-2)(x+3)$$

(2) $a>0$，$b>0$ のとき，不等式$(4a+9b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geqq 25$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

解答

(1) 右辺を展開すると

$$\begin{aligned}&4+a(x+b)+c(x+1)(x-2)+(x+1)(x-2)(x+3)\\ &=4+ax+ab+c(x^2-x-2)+(x^2-x-2)(x+3)\\ &=4+ax+ab+cx^2-cx-2c+x^3+3x^2-x^2-3x-2x-6\\ &=x^3+(c+2)x^2+(a-c-5)x+ab-2c-2\end{aligned}$$

与えられた等式は x についての恒等式であるから，両辺の同じ次数の項の係数はそれぞれ等しいので

$$\begin{cases}0=c+2 & \cdots\cdots①\\ 0=a-c-5 & \cdots\cdots②\\ 5=ab-2c-2 & \cdots\cdots③\end{cases}$$

①から　$c=-2$，これと②から　$a=3$，　これらを③に代入すると　$5=3b+4-2$ より　$b=1$

答　$\boldsymbol{a=3}$，$\boldsymbol{b=1}$，$\boldsymbol{c=-2}$

(2) $(\text{左辺})=(4a+9b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=4+\frac{4a}{b}+\frac{9b}{a}+9$

$$=\frac{4a}{b}+\frac{9b}{a}+13$$

$\frac{4a}{b}>0$，$\frac{9b}{a}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の

大小関係により　$\frac{4a}{b}+\frac{9b}{a} \geqq 2\sqrt{\frac{4a}{b}\cdot\frac{9b}{a}}=2\sqrt{36}=12$

よって　$(4a+9b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{4a}{b}+\frac{9b}{a}+13 \geqq 12+13=25$

また，等号が成り立つのは　$\frac{4a}{b}=\frac{9b}{a}$

すなわち，$4a^2=9b^2$ の場合であるが，$a>0$，$b>0$ であるから，$2a=3b$ のときである。

2 次の問いに答えよ。　　　((1), (2) 各 8 点，計 16 点)

(1) 2 次方程式 $x^2+2x+3=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$ の値を求めよ。

(2) 整式 $P(x)$を $x-1$ で割ると余りは 5，$x-2$ で割ると余りは 7 となる。このとき，$P(x)$を x^2-3x+2 で割ったときの余りを求めよ。

解答

(1) 解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=-\frac{2}{1}=-2,\quad \alpha\beta=\frac{3}{1}=3$$

よって　$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{(-2)^2-2\cdot 3}{3}$

$$=\frac{4-6}{3}=\boldsymbol{-\frac{2}{3}}$$

(2) $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$より

$P(x)$を$(x-1)(x-2)$で割ったときの商を $Q(x)$とする。

2 次式$(x-1)(x-2)$で割ったときの余りは 1 次式か定数である。

よって，余りを $ax+b$ とおくと

$P(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$　……①

が成り立つ。①に $x=1$，2 を代入すると

$P(1)=a+b$，　$P(2)=2a+b$

また，剰余の定理により　$P(1)=5$，　$P(2)=7$ であるから

$\begin{cases}a+b=5\\ 2a+b=7\end{cases}$　これを解いて　$a=2$，$b=3$

したがって，求める余りは　$\boldsymbol{2x+3}$

3 次の問いに答えよ。

((1) 小問各 5 点，(2), (3) 各 8 点，計 26 点)

(1) 2 点 A$(-1,\ 2)$，B$(7,\ 6)$を結ぶ線分 AB について，次の点の座標を求めよ。

① 3 : 1 に内分する点 C　　② 3 : 1 に外分する点 D

(2) 点$(1,\ -2)$を中心とし，原点 O$(0,\ 0)$を通る円の方程式を求めよ。

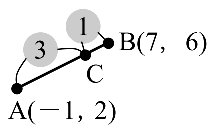
(3) 2 点 A$(-3,\ 0)$，B$(2,\ 0)$について，AP : BP＝2 : 3 を満たす点 P の軌跡を求めよ。

解答

(1) ① 点 C の座標を$(x,\ y)$とすると

$$x=\frac{1\cdot(-1)+3\cdot 7}{3+1}=\frac{-1+21}{4}=5$$

$$y=\frac{1\cdot 2+3\cdot 6}{3+1}=\frac{2+18}{4}=5$$

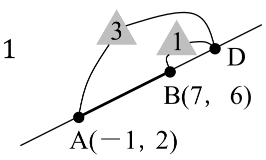


よって，点 C の座標は　**(5，5)**

② 点 D の座標を$(x,\ y)$とすると

$$x=\frac{-1\cdot(-1)+3\cdot 7}{3-1}=\frac{1+21}{2}=11$$

$$y=\frac{-1\cdot 2+3\cdot 6}{3-1}=\frac{-2+18}{2}=8$$



よって，点 D の座標は　**(11，8)**

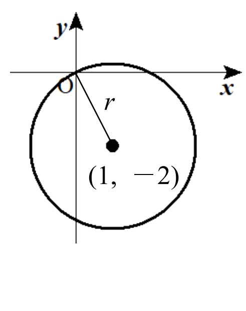
(2) 半径を r とすると

$$r=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$$

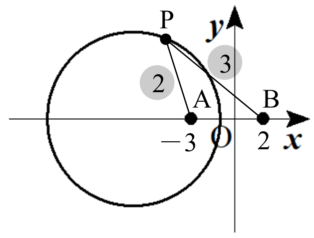
であるから，求める円の方程式は

$$(x-1)^2+\{y-(-2)\}^2=(\sqrt{5})^2$$

すなわち　$\boldsymbol{(x-1)^2+(y+2)^2=5}$



(3)　点 P の座標を$(x,\ y)$とおく。



AP：BP＝2：3 から　3AP＝2BP

すなわち　$9\mathrm{AP}^2=4\mathrm{BP}^2$

これから

$9\{(x+3)^2+y^2\}=4\{(x-2)^2+y^2\}$

$9(x^2+6x+9+y^2)=4(x^2-4x+4+y^2)$

$5x^2+70x+65+5y^2=0$　　　$x^2+14x+13+y^2=0$

$(x+7)^2-49+13+y^2=0$　　すなわち　$(x+7)^2+y^2=36$

よって，点 P の軌跡は，**中心(−7，0)，半径 6 の円**である。

4　次の問いに答えよ。　　　　　((1)～(3) 各 7 点，計 21 点)

α は第 2 象限の角，β は第 1 象限の角で，

$$\sin\alpha=\frac{3}{5},\quad \cos\beta=\frac{5}{13}$$

のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\sin(\alpha-\beta)$　　　(2)　$\tan(\alpha+\beta)$　　　(3)　$\cos 2\alpha$

解答

$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$　　　αは第 2 象限の角で

あるから　$\cos\alpha<0$　　よって　$\cos\alpha=-\sqrt{\frac{16}{25}}=-\frac{4}{5}$

$\sin^2\beta=1-\cos^2\beta=1-\left(\frac{5}{13}\right)^2=\frac{144}{169}$　　　βは第 1 象限の角

であるから　$\sin\beta>0$　　よって　$\sin\beta=\sqrt{\frac{144}{169}}=\frac{12}{13}$

(1)　加法定理により

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}-\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{12}{13}=\frac{15+48}{65}=\boldsymbol{\frac{63}{65}}$$

(2)　$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=-\dfrac{3}{4}$，　$\tan\beta=\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}=\dfrac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}}=\dfrac{12}{5}$

よって，加法定理により

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-\frac{3}{4}+\frac{12}{5}}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{12}{5}}=\frac{20\left(-\frac{3}{4}+\frac{12}{5}\right)}{20\left(1+\frac{36}{20}\right)}$$

$$=\frac{-15+48}{20+36}=\boldsymbol{\frac{33}{56}}$$

(3)　2 倍角の公式により

$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

$$=1-2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2=1-2\cdot\frac{9}{25}=\frac{25-18}{25}=\boldsymbol{\frac{7}{25}}$$

5　次の問いに答えよ。((1) 小問各 6 点，(2) 9 点，計 21 点)

M さん：今，金融の勉強をしていて，複利は等比数列が関係してるようなんだけど，よくわからなくて，,,

A さん：複利って，何？

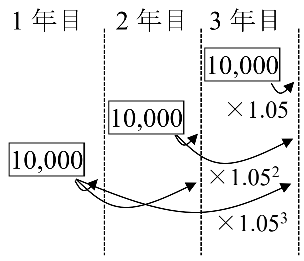
M さん：「複利」と「単利」というのがあって，「単利」は預けた元本のみに利息が付くのに対して，「複利」は［元本＋利息］に利息が付くんだって。短期ではほとんど差がでないけど，長期だと大きな差になるんだって。

(1)　その年に 10,000 円を積み立てると，年末に 5%の利息が付く金融商品があるとする。

①　3 年間単利で積み立てると，元本は 30,000 円になる。3 年間の利息の合計を求めよ。

3 年目 $\boxed{30{,}000}\times 0.05$
2 年目 $\boxed{20{,}000}\times 0.05$
1 年目 $\boxed{10{,}000}\times 0.05$

②　3 年間複利で積み立てるとき，3 年目の利息が付いたあとの［元本＋利息］は $10000(1.05^3+1.05^2+1.05^1)$円となる。これを，$1.05^3=1.16$ として計算せよ。



(2)　(1)の金融商品を 10 年間積み立てたとき，単利と複利の利息の差を求めよ。ただし，$1.05^{10}=1.63$ とする。

解答

(1)　①　$10000\times0.05+20000\times0.05+30000\times0.05$

$=500+1000+1500=$**3000**（円）

②　$1.05^1+1.05^2+1.05^3$ は，初項 1.05，公比 1.05，項数 3 の等比数列の和であるから

$10000(1.05^3+1.05^2+1.05^1)$

$$=10000\cdot\frac{1.05(1.05^3-1)}{1.05-1}$$　　$\boxed{1.05^3=1.16\text{ を代入}}$

$$=10000\cdot\frac{1.05(1.16-1)}{0.05}=10000\cdot21\cdot0.16=\mathbf{33600}\ (\text{円})$$

(2)　【単利】

初項 500，公差 500，項数 10 の等差数列の和であるから

$$(\text{単利の利息の合計})=\frac{10}{2}\{2\cdot500+(10-1)\cdot500\}$$

$=5(1000+4500)=27500$（円）

【複利】

(1) ② と同様にして［元本＋利息］を求めてから，元本を引けばよい。

$$(\text{元本}+\text{利息})=10000\cdot\frac{1.05(1.05^{10}-1)}{1.05-1}$$

$$=10000\cdot21\cdot(1.63-1)=132300\ (\text{円})$$

よって，複利の利息の合計は $132300-100000=32300$ (円)

以上から，利息の差は　$32300-27500=$**4800**（円）