出題範囲：指数関数・対数関数，微分と積分，統計的な推測，ベクトル

1 次の問いに答えよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。 （(1), (2) 各 15 点，計 30 点）

(1) 20^{23} は何桁の整数か。

(2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$ を小数で表すと，小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。

解答

(1) 20^{23} の常用対数の値を求める。

$\log_{10}20^{23}=23\log_{10}20$

$=23(\log_{10}2+\log_{10}10)$

$=23(0.3010+1)$

$=29.923$

よって $20^{23}=10^{29.923}$

$10^{29}<10^{29.923}<10^{30}$

であるから

$10^{29}<20^{23}<10^{30}$

したがって，20^{23} は

30 桁の整数である。

$10^{29}=\overbrace{1\underbrace{00\cdots\cdots00}_{29\text{ 個}}}^{30\text{ 桁}}$

$10^{30}=\overbrace{1\underbrace{00\cdots\cdots00}_{30\text{ 個}}}^{31\text{ 桁}}$

(2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$ の常用対数の値を求める。

$\log_{10}\left(\frac{2}{3}\right)^{20}=20\log_{10}\frac{2}{3}$

$=20(\log_{10}2-\log_{10}3)$

$=20(0.3010-0.4771)$

$=-3.522$

よって $\left(\frac{2}{3}\right)^{20}=10^{-3.522}$

$10^{-4}<10^{-3.522}<10^{-3}$

であるから

$10^{-4}<\left(\frac{2}{3}\right)^{20}<10^{-3}$

したがって，$\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$ は**小数第 4 位**に初めて 0 でない数字が現れる。

$10^{-4}=\underbrace{0.\,000}_{4\text{ 個}}\!\!\overset{\text{小数第 4 位}}{1}$

$10^{-3}=\underbrace{0.\,00}_{3\text{ 個}}\!\!\overset{\text{小数第 3 位}}{1}$

2 点$(1,\ -4)$から曲線 $y=x^3-4x$ に引いた接線の方程式を求めよ。 （25 点）

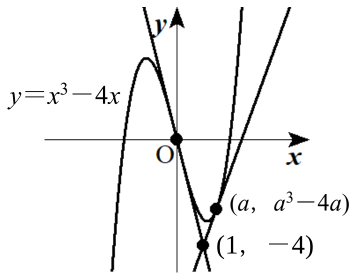
解答

$f(x)=x^3-4x$ とすると

$f'(x)=3x^2-4$

接点の座標を$(a,\ a^3-4a)$とおくと，その点における接線の傾きは

$f'(a)=3a^2-4$



よって，この接線の方程式は

$y-(a^3-4a)=(3a^2-4)(x-a)$

すなわち $y=(3a^2-4)x-3a^3+4a+(a^3-4a)$

$=(3a^2-4)x-2a^3$ ……①

直線①が点$(1,\ -4)$を通るから $-4=(3a^2-4)\cdot1-2a^3$

$2a^3-3a^2-4+4=0$ $2a^3-3a^2=0$ $a^2(2a-3)=0$

これを解くと $a=0,\ \frac{3}{2}$

$a=0$ のとき，①は $y=-4x$

$a=\frac{3}{2}$ のとき，①は $y=\left(3\cdot\frac{9}{4}-4\right)x-2\cdot\frac{27}{8}=\frac{11}{4}x-\frac{27}{4}$

以上から，求める接線の方程式は $\boldsymbol{y=-4x,\quad y=\frac{11}{4}x-\frac{27}{4}}$

3 あるスーパーマーケットの利用者の中から無作為に選んだ 100 人にレジの待ち時間を聞いたところ，標本平均が 5.0 分，標本標準偏差が 10.0 分であった。このスーパーマーケットのレジの平均待ち時間を，信頼度 95%で区間推定せよ。（20 点）

解答

レジの平均待ち時間を m とする。

標本の大きさ 100 は大きいので，母標準偏差 σ のかわりに

標本標準偏差 s＝10.0 を用いる。

標本平均 $\bar{x}$ ＝5.0 であるから，m に対する信頼度 95% の

信頼区間は

$$5.0-1.96\times\frac{10.0}{\sqrt{100}} \leqq m \leqq 5.0+1.96\times\frac{10.0}{\sqrt{100}}$$

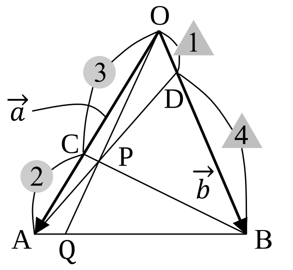
すなわち　$3.04 \leqq m \leqq 6.96$

したがって，レジの平均待ち時間は

3.0 分以上 7.0 分以下

と推定できる。

4 △OAB において，



$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。

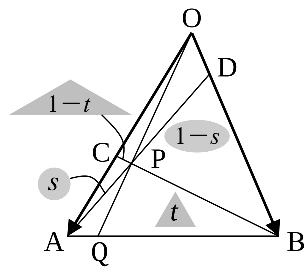
辺 OA を 3：2 に内分する点を C，辺 OB を 1：4 に内分する点を D，

線分 AD と BC の交点を P とし，

直線 OP と辺 AB の交点を Q とする。次のベクトルを，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。　（(1) 15 点，(2) 10 点，計 25 点）

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$　　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$

解答



(1)　点 P は線分 AD 上にあるから，

実数 s を用いて

AP：PD＝s：$(1-s)$

とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\,\overrightarrow{\mathrm{OD}}+(1-s)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$$=(1-s)\,\vec{a}+\frac{1}{5}s\,\vec{b}\quad\cdots\cdots①$$

また，点 P は線分 BC 上にあるから，実数 t を用いて

BP：PC＝t：$(1-t)$　とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{3}{5}t\,\vec{a}+(1-t)\,\vec{b}\quad\cdots\cdots②$$

①，②から　$(1-s)\,\vec{a}+\frac{1}{5}s\,\vec{b}=\frac{3}{5}t\,\vec{a}+(1-t)\,\vec{b}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\nparallel\vec{b}$ であるから　$\begin{cases}1-s=\dfrac{3}{5}t\\ \dfrac{1}{5}s=1-t\end{cases}$

これを解くと　$s=\dfrac{5}{11}$，　$t=\dfrac{10}{11}$

したがって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{6}{11}\vec{a}+\dfrac{1}{11}\vec{b}}$

(2)　点 Q は辺 AB 上にあるから，実数 u を用いて

AQ：QB＝u：$(1-u)$　とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=u\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(1-u)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1-u)\,\vec{a}+u\,\vec{b}\quad\cdots\cdots①$$

また，点 Q は直線 OP 上にあるから，実数 k を用いて

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\,\overrightarrow{\mathrm{OP}}$　とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\left(\frac{6}{11}\vec{a}+\frac{1}{11}\vec{b}\right)=\frac{6}{11}k\,\vec{a}+\frac{1}{11}k\,\vec{b}\quad\cdots\cdots②$$

①，②から　$(1-u)\,\vec{a}+u\,\vec{b}=\frac{6}{11}k\,\vec{a}+\frac{1}{11}k\,\vec{b}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\nparallel\vec{b}$ であるから　$\begin{cases}1-u=\dfrac{6}{11}k\\ u=\dfrac{1}{11}k\end{cases}$

これを解くと　$u=\dfrac{1}{7}$，　$k=\dfrac{11}{7}$

したがって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{6}{7}\vec{a}+\dfrac{1}{7}\vec{b}}$