Math-Aquarium【実力テスト＋解答】数学ⅠAⅡB (C) 実力テスト（応用：最大・最小特集）

$\boxed{\text{出題範囲}}$：2 次関数，確率，式と証明（整数問題），指数関数・対数関数，ベクトル

$\boxed{1}$　関数 $y=-(x^2+2x)^2+2(x^2+2x)$について，次の問いに答えよ。

（(1)7 点，(2)13 点，計 20 点）

(1)　$t=x^2+2x$ とするとき，t のとり得る値の範囲を求めよ。

(2)　y の最大値と，そのときの x の値を求めよ。

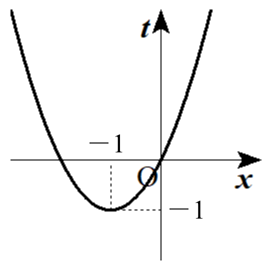
解答

(1)　$t=x^2+2x=(x^2+2x+1)-1$

$=(x+1)^2-1$

右のグラフより，t のとり得る値の範囲は

$\boldsymbol{t \geqq -1}$



(2)　$y=-(x^2+2x)^2+2(x^2+2x)$を，

(1)の t の式で表すと

$y=-t^2+2t$

$=-(t^2-2t+1)+1$

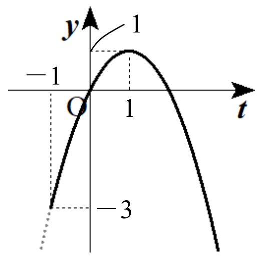
$=-(t-1)^2+1$

(1)より，$t \geqq -1$ であるから

y は $t=1$ で最大値 1 をとる。

$t=1$ のとき　$1=x^2+2x$

$x^2+2x-1=0$



$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2}=\frac{-2\pm 2\sqrt{2}}{2}=-1\pm\sqrt{2}$$

以上から，　$\boldsymbol{x=-1\pm\sqrt{2}}$**のとき 最大値1**

$\boxed{2}$　表，裏が等確率で出る硬貨が十分多く用意されているとする。n 枚の硬貨を投げて表がちょうど 2 枚出るときの確率を p_n とするとき，次の問いに答えよ。ただし，n は 2 以上の自然数とする。　（(1)7 点，(2)13 点，計 20 点）

(1)　$\dfrac{p_{n+1}}{p_n}<1$ となるnの最小値を求めよ。

(2)　表がちょうど 2 枚出る確率が最大となる n と，そのときの確率を求めよ。

解答

(1)　$p_2={}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$,

$p_3={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$,

$p_4={}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{8}$,

$p_5={}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{5}{16}$,

⋮

$p_n={}_n\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}=\frac{n(n-1)}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{n(n-1)}{2^{n+1}}$,

$p_{n+1}={}_{n+1}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)-2}=\frac{(n+1)n}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$=\frac{n(n+1)}{2^{n+2}}$

よって　$\dfrac{p_{n+1}}{p_n}=\dfrac{\frac{n(n+1)}{2^{n+2}}}{\frac{n(n-1)}{2^{n+1}}}=\dfrac{n+1}{2(n-1)}$

これより　$\dfrac{n+1}{2(n-1)}<1$　　$n-1>0$ であるから

$n+1<2(n-1)$　　$n>3$

したがって，自然数 n の最小値は　**4**

(2)　(1)の解答より　$p_3=p_4=\dfrac{3}{8}$

であり，(1)より，$n>3$ のとき $\dfrac{p_{n+1}}{p_n}<1$ であるから

$p_1<p_2<p_3=p_4>p_5>p_6>\cdots\cdots$

したがって，$\boldsymbol{n=3}$**，4** のとき確率は最大となり，

そのときの確率は　$\boldsymbol{\dfrac{3}{8}}$

3　自然数x，y，zが$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{3}{4}$，$x>y>z$を満たすとき，$x+y+z$ が最小となる x, y, z を求めよ。　（20 点）

M さん：何からすればよいのやら…
A さん：取っ掛かりがないね。。とりあえず，x，y，z に適当な数を代入してみようか。
M さん：$x>y>z$ だから，$(x,\ y,\ z)=(3,\ 2,\ 1)$を代入すると

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}=\frac{2+3+6}{6}=\frac{11}{6}$$

これだと$\dfrac{3}{4}$を超えるから，$(x,\ y,\ z)=(6,\ 5,\ 4)$

を代入すると　$\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{10+12+15}{60}=\dfrac{37}{60}$

これだと$\dfrac{3}{4}$より小さくなる。。

A さん：$x>y>z$のとき$\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{y}<\dfrac{1}{z}$だから，

$\dfrac{1}{z}$が大きすぎても小さすぎてもダメな気がする。

M さん：まずは$\dfrac{1}{z}$の範囲を考えてみましょうか！

解答

x，y，zは自然数であり，$x>y>z$であるから　$\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{y}<\dfrac{1}{z}$

よって　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}<\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{3}{z}$

これより，$\dfrac{3}{4}<\dfrac{3}{z}$から　$z<4$

また，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}>\dfrac{1}{z}$であるから　$\dfrac{3}{4}>\dfrac{1}{z}$　　よって　$z>\dfrac{4}{3}$

以上から　$\dfrac{4}{3}<z<4$　　zは自然数であるから　$z=2,\ 3$

(ⅰ)　$z=2$ のとき

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}$より　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}$

$x>y$であることから　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}<\dfrac{2}{y}$より　$\dfrac{1}{4}<\dfrac{2}{y}$

よって　$y<8$

また，$\dfrac{1}{4}>\dfrac{1}{y}$より　$y>4$

したがって，$4<y<8$ より　$y=5,\ 6,\ 7$

(ⅰ)－①　$y=5$ のとき，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{4}$より　$\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{20}$

よって　$x=20$

(ⅰ)－②　$y=6$ のとき，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{4}$より　$\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{12}$

よって　$x=12$

(ⅰ)－③　$y=7$ のとき　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{7}=\dfrac{1}{4}$より　$\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{28}$

このとき$x=\dfrac{28}{3}$となるが，xは自然数より不適。

(ⅱ)　$z=3$ のとき

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{3}{4}$より　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{12}$

$x>y$であることから　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}<\dfrac{2}{y}$より　$\dfrac{5}{12}<\dfrac{2}{y}$

よって　$y<\dfrac{24}{5}$

また，$\dfrac{5}{12}>\dfrac{1}{y}$より　$y>\dfrac{12}{5}$

したがって，$\dfrac{12}{5}<y<\dfrac{24}{5}$より　$y=3,\ 4$

ここで $y>z$ であるから，$y=3$ は不適。

(ⅱ)－①　$y=4$ のとき，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{12}$より

$\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$　　よって　$x=6$

(ⅰ)，(ⅱ)から，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{3}{4}$，$x>y>z$を満たす自然数 x，y，z は

$(x,\ y,\ z)=(20,\ 5,\ 2)$，$(12,\ 6,\ 2)$，$(6,\ 4,\ 3)$

以上より，$x+y+z$ が最小となる x，y，z は

$(x,\ y,\ z)=(6,\ 4,\ 3)$

4　関数 $y=3^{2x}+3^{-2x}-4(3^x+3^{-x})$について，$3^x+3^{-x}=t$ とおくとき，y を t を用いて表せ。また，y の最小値とそのときの x の値を求めよ。（20 点）

解答

$3^x+3^{-x}=t$ であるから

$$t^2=(3^x+3^{-x})^2=3^{2x}+2+3^{-2x}$$

よって　$3^{2x}+3^{-2x}=t^2-2$

したがって　$y=3^{2x}+3^{-2x}-4(3^x+3^{-x})$

$$=t^2-2-4t$$

$$\boldsymbol{=t^2-4t-2}$$

相加平均と相乗平均の大小関係により，

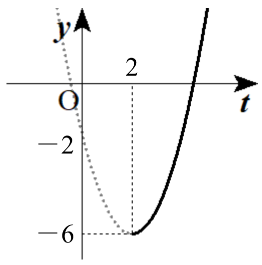
$t=3^x+3^{-x}\geqq 2\sqrt{3^x\cdot 3^{-x}}=2$ であるから

$t\geqq 2$ における $y=t^2-4t-2$ の最小値は

$$y=t^2-4t-2$$
$$=(t-2)^2-4-2$$
$$=(t-2)^2-6$$

これから，$t=2$ のとき

最小値-6 をとる。



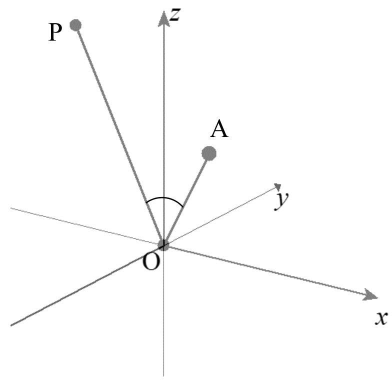
$t=2$ となるのは　$3^x=3^{-x}$

すなわち，$x=0$ のときであるから

$x=0$ のとき最小値-6

$t=2$ となるのは 3^x と 3^{-x} の相加平均と相乗平均の大小関係における，等号が成立するときである。

5　原点 O(0，0，0)，定点 A(1，0，2)，動点 P($2t$，$t+1$，$-t+3$)がある。$\angle$AOP の大きさが最小となるときの実数 t の値を求めよ。（20 点）



解答

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 0,\ 2)$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(2t,\ t+1,\ -t+3)$であり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\,|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos\angle\mathrm{AOP}$$

が成り立つ。

ここで　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=1\cdot 2t+0\cdot(t+1)+2(-t+3)$

$$=2t-2t+6=6$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{1^2+0^2+2^2}=\sqrt{5}$$

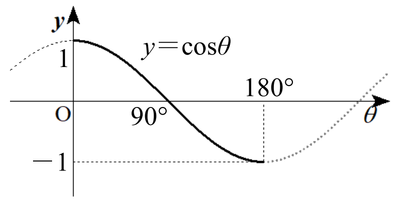
$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\sqrt{(2t)^2+(t+1)^2+(-t+3)^2}$$
$$=\sqrt{4t^2+t^2+2t+1+t^2-6t+9}$$
$$=\sqrt{6t^2-4t+10}$$
$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3t^2-2t+5}$$

よって，$6=\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3t^2-2t+5}\cos\angle\mathrm{AOP}$ より

$$\cos\angle\mathrm{AOP}=\frac{6}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{3t^2-2t+5}}$$

ここで，$0^\circ\leqq\angle\mathrm{AOP}\leqq 180^\circ$

であるから，cos∠AOP が最大となるとき，∠AOP の大きさは最小となる。



θ が小さいほど $\cos\theta$ の値は大きくなる。

$$3t^2-2t+5$$
$$=3\left(t^2-\frac{2}{3}t\right)+5$$
$$=3\left\{\left(t-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}\right\}+5$$
$$=3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}+5$$
$$=3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{14}{3}$$

であるから，$3t^2-2t+5>0$ である。

したがって，cos∠AOP が最大となるのは，$3t^2-2t+5$ が最小となるときであり，

$$3t^2-2t+5=3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{14}{3}$$

であるから，$3t^2-2t+5$ は$t=\dfrac{1}{3}$のとき最小となる。

以上より，∠AOP の大きさが最小となる実数 t の値は

$$\boldsymbol{t=\frac{1}{3}}$$