1 次の問いに答えよ。　((1)～(3) 小問各 6 点, 計 42 点)

(1) 次の 2 次関数のグラフの頂点を求めよ。

① $y=-x^2+x-2$　　② $y=x^2-ax+2$　(a：定数)

(2) 次の方程式，不等式を解け。ただし，x は実数とする。

① $x^2+5x+6>0$

② $x^3+x^2+x+1=0$

③ $9^x-3^{x+2}+8=0$

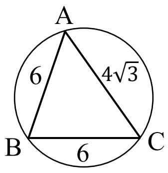
(3) 三角形 ABC において，

AB＝6，BC＝6，CA＝$4\sqrt{3}$

のとき，次を求めよ。

① 三角形 ABC の外接円の半径

② 三角形 ABC の面積



解答

(1) ① $y=-x^2+x-2=-(x^2-x)-2$

$$=-\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}-2=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}-2$$

$$=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{4}$$

よって，頂点は $\boldsymbol{\left(\frac{1}{2},\ -\frac{7}{4}\right)}$

② $y=x^2-ax+2=\left(x-\frac{1}{2}a\right)^2-\frac{1}{4}a^2+2$

よって，頂点は $\boldsymbol{\left(\frac{1}{2}a,\ -\frac{1}{4}a^2+2\right)}$

(2) ① $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)>0$

よって　$\boldsymbol{-3<x,\ x<-2}$

② $P(x)=x^3+x^2+x+1$

とおくと

$P(1)=-1+1-1+1=0$

よって　$P(x)=(x+1)(x^2+1)$

-1	1	1	1	1
		-1	0	-1
	1	0	1	0

したがって，$P(x)=0$ を満たす実数 x は

$\boldsymbol{x=-1}$

③ $3^x=t$ とおくと　$9^x=(3^2)^x=3^{2x}=(3^x)^2=t^2$,

$3^{x+2}=3^2\cdot 3^x=9\cdot 3^x=9t$

よって　$9^x-3^{x+2}+8=t^2-9t+8=(t-1)(t-8)=0$

$t=1$ のとき $3^x=1$　両辺に対して底 3 の対数をとると

$\log_3 3^x=\log_3 1$　　$x=0$

$t=8$ のとき $3^x=8$　両辺に対して底 3 の対数をとると

$\log_3 3^x=\log_3 8$　　$x=\log_3 2^3=3\log_3 2$

以上から　$\boldsymbol{x=0,\ 3\log_3 2}$

(3) ① $\left(4\sqrt{3}\right)^2=6^2+6^2-2\cdot 6\cdot 6\cos B$

$72\cos B=72-48=24$　　$\cos B=\frac{24}{72}=\frac{1}{3}$

$$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

外接円の半径を R とすると

$$2R=\frac{b}{\sin B}=\frac{4\sqrt{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=3\sqrt{6}$$　よって　$\boldsymbol{R=\frac{3\sqrt{6}}{2}}$

② 求める面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\sin B=3\cdot 6\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\boldsymbol{12\sqrt{2}}$$

2 次の問いに答えよ。　((1) 7 点, (2), (3) 各 9 点, 計 25 点)

$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+3n-2$　($n=1$，2，3，……)で定義される数列$\{a_n\}$がある。

(1) $a_{n+1}-a_n=b_n$ とおくとき，b_n，b_{n+1} の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2) b_n を求めよ。　　(3) a_n を求めよ。

解答

(1) $a_{n+1}=2a_n+3n-2$　……①

$a_{n+2}=2a_{n+1}+3(n+1)-2$　……②　　とすると，②－①は

$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)+3(n+1)-2-(3n-2)$

$=2(a_{n+1}-a_n)+3$

ここで，$a_{n+1}-a_n=b_n$ とおくと　$a_{n+2}-a_{n+1}=b_{n+1}$

よって　$\boldsymbol{b_{n+1}=2b_n+3}$

(2) $b_1=a_2-a_1=(2a_1+3\cdot 1-2)-a_1=2\cdot 1+3-2-1=2$,

$\alpha=2\alpha+3$ とおくと　$\alpha=-3$　　よって　$b_{n+1}=2b_n+3$ は

$b_{n+1}+3=2(b_n+3)$ と変形できる。

$b_n+3=c_n$ とおくと　$c_{n+1}=2c_n$　　$c_1=b_1+3=2+3=5$ より

$c_n=5\cdot 2^{n-1}$　　したがって　$\boldsymbol{b_n}=c_n-3=\boldsymbol{5\cdot 2^{n-1}-3}$

(3) $a_{n+1}-a_n=5\cdot 2^{n-1}-3$ より

$$\boldsymbol{a_n}=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(5\cdot 2^{k-1}-3)$$

$$=1+\frac{5(2^{n-1}-1)}{2-1}-3(n-1)$$

$$=1+5\cdot 2^{n-1}-5-3n+3$$

$$\boldsymbol{=5\cdot 2^{n-1}-3n-1}$$

3 $y=\sin^2 x+2\sin^2\dfrac{x}{2}\quad(0\leqq x\leqq\pi)$ ……① について，

次の問いに答えよ。 ((1) 7 点，(2) 9 点，計 16 点)

(1) $\cos x=t$ とするとき，t の変域を求めよ。また，①を t で表せ。

(2) ①の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ。

解答

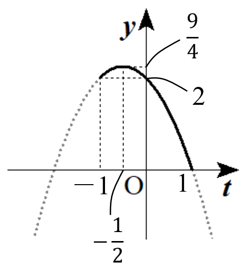
(1) $0\leqq x\leqq\pi$ のとき $-1\leqq\cos x\leqq 1$ よって $\boldsymbol{-1\leqq t\leqq 1}$

また，$\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-t^2$，$\sin^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1-\cos x}{2}=\dfrac{1-t}{2}$

したがって $\boldsymbol{y}=1-t^2+2\cdot\dfrac{1-t}{2}=\boldsymbol{-t^2-t+2\ (-1\leqq t\leqq 1)}$

(2) (1)より

$$\begin{aligned}y&=-t^2-t+2\\&=-(t^2+t)+2\\&=-\left\{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}+2\\&=-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}+2\\&=-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\end{aligned}$$



$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{9}{4}$，$t=1$ のとき最小値 0 をとる。

$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ $0\leqq x\leqq\pi$ のとき $x=\dfrac{2}{3}\pi$

$t=1$ のとき $\cos x=1$ $0\leqq x\leqq\pi$ のとき $x=0$

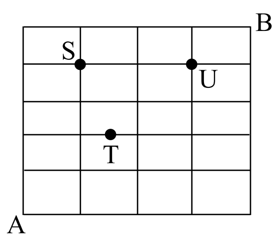
したがって，$\boldsymbol{x=\dfrac{2}{3}\pi}$ **のとき最大値** $\boldsymbol{\dfrac{9}{4}}$ **をとり，**

$\boldsymbol{x=0}$ **のとき最小値** $\boldsymbol{0}$ **をとる。**

4 右の図のような道がある。

このとき，次の問いに答えよ。

((1) 7 点，(2) 10 点，計 17 点)



(1) A 地点から B 地点まで最短の道を行くとき，道順は全部で何通りあるか。

(2)

M さん：S 地点，T 地点，U 地点で工事が予定されていて，通行止めになるみたいだよ。

A さん：どの地点が通行止めになると困る人が多いかな。S 地点を通る人は多くない気がするけど，，，

A 地点から B 地点まで最短の道を行くとき，S，T，U 地点のどれか 1 つを経由するとする。どの地点を経由する場合の道順の総数が，1 番多くなるか。

解答

(1) $\dfrac{9!}{4!\ 5!}=\dfrac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\times 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\mathbf{126}$ **(通り)**

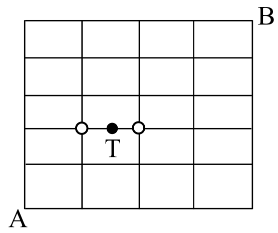
(2) (ⅰ) S 地点を経由する場合

$$\frac{5!}{1!\ 4!}\times\frac{4!}{3!\ 1!}=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\times 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\times\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\times 1}$$

$=20$ (通り)

(ⅱ) T 地点を経由する場合

右の図の ○ の地点を通ればよいから



$$\frac{3!}{1!\ 2!}\times\frac{5!}{2!\ 3!}$$

$$=\frac{3\cdot 2\cdot 1}{1\times 2\cdot 1}\times\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\times 3\cdot 2\cdot 1}$$

$=30$ (通り)

(ⅲ) U 地点を経由する場合

$$\frac{7!}{3!\ 4!}\times\frac{2!}{1!\ 1!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\times 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\times\frac{2\cdot 1}{1\times 1}$$

$=70$ (通り)

(ⅰ)〜(ⅲ)から，**U 地点**を経由する場合の道順の総数が 1 番多い。