1　鋭角三角形 ABC において，AB＝5，AC＝6，面積が $6\sqrt{6}$ のとき，次を求めよ。

（(1)，(2) 各 7 点，(3)，(4) 各 8 点，計 30 点）

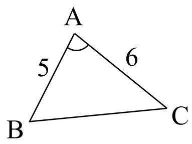
(1)　sin$A$　　　(2)　辺 BC の長さ

(3)　△ABC の外接円の半径　　　(4)　△ABC の内接円の半径

解答

(1)　面積をSとすると，$S=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin A$ であるから

$$6\sqrt{6}=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6\sin A$$



よって　$\boldsymbol{\sin A=\dfrac{6\sqrt{6}}{15}=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}}$

(2)　角 A は鋭角であるから　cos$A$＞0

よって　$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{25-24}{25}}=\dfrac{1}{5}$

したがって　$\mathrm{BC}^2=5^2+6^2-2\cdot 5\cdot 6\cdot\dfrac{1}{5}=25+36-12=49$

BC＞0 であるから　**BC＝7**

(3)　△ABC の外接円の半径を R とすると

$\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin A}=2R$ であるから　$\dfrac{7}{\frac{2\sqrt{6}}{5}}=2R$

よって　$R=\dfrac{7}{2\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}}=\dfrac{35}{4\sqrt{6}}=\boldsymbol{\dfrac{35\sqrt{6}}{24}}$

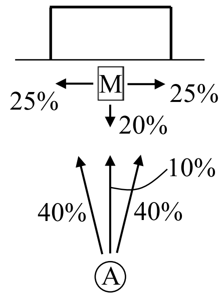
(4)　△ABC の内接円の半径を r とすると

$S=\dfrac{1}{2}r(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{AC})$ であるから

$6\sqrt{6}=\dfrac{1}{2}r(5+6+7)=9r$

よって　$r=\dfrac{6\sqrt{6}}{9}=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{6}}{3}}$

2　サッカーの PK で，ゴールキーパーの M は左右に飛んで防ぐ確率がそれぞれ 25%，中央で待っていて防ぐ確率が 20%で，思い通りのコースでも得点されてしまう確率が 30%というデータがある。
また，キッカーの A は左右の隅を狙う確率がそれぞれ 40%，中央にける確率が 10%で，ゴールの枠を外してしまう確率が 10%というデータがある。



M と A による PK において，A のチームに得点が入ったとき，キッカーA が中央にける確率を求めよ。　（15 点）

解答

キッカーA が左にける確率が 40%，ゴールキーパーM がそちらにけられたときに防げない確率は 75%であるから，

$\boxed{100-25=75\ (\%)}$

キッカーA が左にけって得点が入る確率は　0.4×0.75＝0.3

同様に考えて，中央にけって得点が入る確率は　0.1×0.8＝0.08

右にけって得点が入る確率は　0.4×0.75＝0.3

以上から，PK において A のチームに得点が入る確率は

0.3＋0.08＋0.3＝0.68

であり，このときキッカーA が中央にける条件付き確率は

$$\frac{0.08}{0.68}=\boldsymbol{\frac{2}{17}}$$

3　20^{23} は何桁の整数か。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。

（15 点）

解答

$20^{23}=10^r$ とおくと

$r=\log_{10}20^{23}=23\log_{10}20=23(\log_{10}2+\log_{10}10)$

$=23(\log_{10}2+1)=23(0.3010+1)=23\times 1.3010$

$=29.923$

よって　$20^{23}=10^{29.923}$

$10^{29}<10^{29.923}<10^{30}$ であるから　$10^{29}<20^{23}<10^{30}$

したがって，20^{23} は **30 桁** の整数である。

4　M さんは家から学校までの登校時間を毎日計っており，平均 10 分，標準偏差 2 分の正規分布に従うとみなせることが分かっているとする。次の問いに答えよ。
ただし，Z は標準正規分布に従う確率変数で，
$P(0 \leqq Z \leqq 1) = 0.3413$，　$P(0 \leqq Z \leqq 0.5) = 0.1915$ とする。
（(1)，(2) 各 10 点，計 20 点）

(1)　登校時間が 12 分以上となる確率を求めよ。

(2)　M さんは寝坊をして，始業時間の 9 分前に家を出ることになった。始業時間に間に合う確率を求めよ。

解答

(1)　登校時間を X 分とすると，X は $N(10,\ 2^2)$ に従うから，

$$Z = \frac{X-10}{2}$$

とおくと，Z は $N(0,\ 1)$ に従う。

よって，$X \geqq 12$ のとき

$Z \geqq 1$ であるから

$X=12$ のとき

$$Z = \frac{12-10}{2} = 1$$

$P(X \geqq 12) = P(Z \geqq 1)$

$= P(Z \geqq 0) - P(0 \leqq Z \leqq 1)$

$= 0.5 - 0.3413$

$=$ **0.1587**

(2)　題意を満たす確率は $P(X \leqq 9)$であり，

$X \leqq 9$ のとき $Z \leqq -0.5$ であるから

$X=9$ のとき

$$Z = \frac{9-10}{2} = -0.5$$

$P(X \leqq 9) = P(Z \leqq -0.5)$

$= P(Z \geqq 0.5)$

$= P(Z \geqq 0) - P(0 \leqq Z \leqq 0.5)$

$= 0.5 - 0.1915$

$=$ **0.3485**

5　$\vec{a} = (1,\ 1,\ 0)$，$\vec{b} = (-1,\ 4,\ 1)$とする。

次の問いに答えよ。　（(1)，(2) 10 点，計 20 点）

(1)　ベクトル $\vec{a} + t\vec{b}$ の大きさが最小になるときの実数tの値と，そのときの大きさを求めよ。

(2)　2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を求めよ。

解答

(1)　$\vec{a} + t\vec{b} = (1,\ 1,\ 0) + t(-1,\ 4,\ 1) = (1-t,\ 1+4t,\ t)$

よって　
$$\begin{aligned}\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|^2 &= (1-t)^2 + (1+4t)^2 + t^2 \\ &= 1 - 2t + t^2 + 1 + 8t + 16t^2 + t^2 \\ &= 18t^2 + 6t + 2 \\ &= 18\left(t^2 + \frac{1}{3}t\right) + 2 \\ &= 18\left\{\left(t+\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{36}\right\} + 2 \\ &= 18\left(t+\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{2} + 2 \\ &= 18\left(t+\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{3}{2}\end{aligned}$$

$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|^2$は $t = -\dfrac{1}{6}$ のとき最小となり，$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right| \geqq 0$ であるから $\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|$も $t = -\dfrac{1}{6}$ のときに最小になる。

したがって，**$t = -\dfrac{1}{6}$ のとき最小値** $\sqrt{\dfrac{3}{2}} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{2}}$

(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\times(-1) + 1\times 4 + 0\times 1 = 3$,

$|\vec{a}| = \sqrt{1^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}$,

$|\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2+4^2+1^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

であるから，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角をθとすると

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{3}{\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ であるから　$\theta =$ **60°**