出題範囲：2 次関数，場合の数，微分と積分，数列，ベクトル

1　a を定数として，x の 2 次関数 $y=x^2+2ax+2a$ の最小値を m とする。　((1)7 点，(2)13 点，計 20 点)

(1)　m を a の式で表せ。

(2)　a の関数 m の最大値と，そのときの a の値を求めよ。

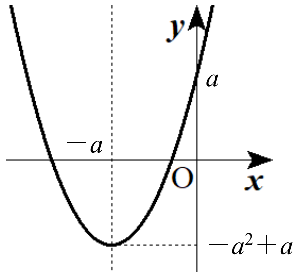
解答

(1)　$y=x^2+2ax+a$

$=(x+a)^2-a^2+a$

よって

$\boldsymbol{m=-a^2+a}$

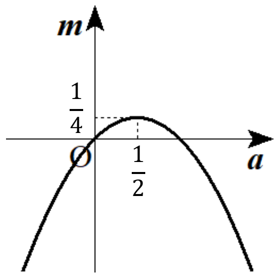


(2)　$m=-a^2+a$

$=-(a^2-a)$

$=-\left\{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}$

$=-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$



よって，m は $\boldsymbol{a=\frac{1}{2}}$ **のとき最大値** $\boldsymbol{\frac{1}{4}}$ をとる。

2　大，中，小 3 個のさいころを投げて，出た目の最大値が 4 であるような目の出方は何通りあるか。　(20 点)

M さん：目の最大値が 4 になるためには，5 や 6 は出たらダメだね。

A さん：それと，最大値が 4 だから，例えば□□□のように少なくとも 1 つは 4 が出る必要があるね。

M さん：□□□でも出た目の最大値は 4 だから，4 が 1 つ出る場合，2 つ出る場合，3 つ出る場合を考えるのかな。。大変だね。。。

A さん：3 個のさいころの目が 4 以下になる場合から，最大値が 4 にならない場合を考えればいいんじゃないかな。

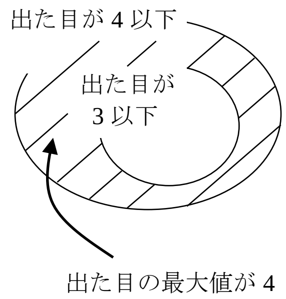
解答

3 個のさいころの目が 4 以下の場合から

3 個のさいころの目が 3 以下の場合を引けば，

3 個のさいころの目の最大値が 4 である場合の数が求められる。

よって　$4^3-3^3=64-27=$**37（通り）**



3　定積分 $\int_0^1 (x^2-ax)^2\,dx$ が最小となるような定数 a の値を求めよ。また，その最小値を求めよ。　(20 点)

解答

$$\int_0^1 (x^2-ax)^2\,dx=\int_0^1 (x^4-2ax^3+a^2x^2)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}ax^4+\frac{1}{3}a^2x^3\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{5}-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}a^2=\frac{1}{3}\left(a^2-\frac{3}{2}a\right)+\frac{1}{5}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\left(a-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}\right\}+\frac{1}{5}$$

$$=\frac{1}{3}\left(a-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{3}{16}+\frac{1}{5}=\frac{1}{3}\left(a-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{15}{80}+\frac{16}{80}$$

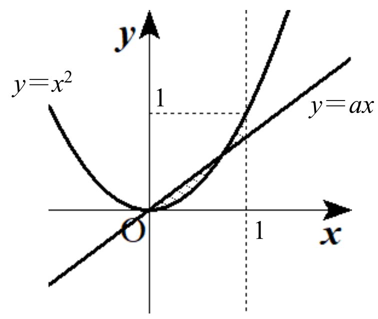
$$=\frac{1}{3}\left(a-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{80}$$

よって，$\boldsymbol{a=\frac{3}{4}}$ **のとき最小値** $\boldsymbol{\frac{1}{80}}$

$\int_0^1 (x^2-ax)^2\,dx$ は，

右の図の斜線部の面積の 2 乗の値であるので，

$a=\frac{3}{4}$ は斜線部の面積が最小となる a の値である。



4　第 n 項 $a_n=-n^2-2n+40$ ($n=1$，2，3，……) で与えられる数列$\{a_n\}$の，初項から第 n 項までの和を S_n とする。
S_n が最大となるときの n の値と，そのときの S_n の値を求めよ。
（20 点）

解答

$a_n<0$ とすると　$-n^2-2n+40<0$

$$n^2+2n-40>0$$

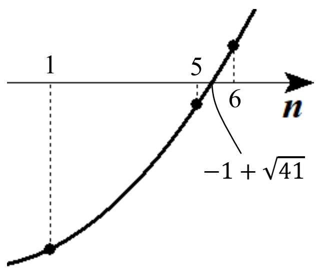
$n^2+2n-40=0$ となるのは

$$n=-1\pm\sqrt{1^2-(-40)}=-1\pm\sqrt{41}$$

ここで，$6<\sqrt{41}<7$ であるから　$5<-1+\sqrt{41}<6$

n は自然数であるから　$n\geqq 6$

よって，$n\leqq 5$ のとき $a_n>0$，
$n\geqq 6$ のとき $a_n<0$



したがって，S_n は $\boldsymbol{n=5}$ のとき最大となる。

そのときの S_n の値は

$$\boldsymbol{S_5}=\sum_{k=1}^{5}a_k$$
$$=\sum_{k=1}^{5}(-k^2-2k+40)$$
$$=-\frac{1}{6}\cdot 5(5+1)(2\cdot 5+1)-2\cdot\frac{1}{2}\cdot 5(5+1)+40\cdot 5$$
$$=-\frac{1}{6}\cdot 5\cdot 6\cdot 11-2\cdot\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6+200$$
$$=-55-30+200=\mathbf{115}$$

5　$\vec{a}=(2,\ -1)$，$\vec{b}=(1,\ 1)$ に対して，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ を最小にする定数 t の値と，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ の最小値を求めよ。
また，このときの $\vec{b}$ と $\vec{a}+t\vec{b}$ のなす角を求めよ。　（20 点）

解答

$\vec{a}+t\vec{b}=(2,\ -1)+t(1,\ 1)=(2+t,\ -1+t)$

よって　$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=(2+t)^2+(-1+t)^2$

$$=4+4t+t^2+1-2t+t^2$$
$$=2t^2+2t+5$$
$$=2(t^2+t)+5$$
$$=2\left\{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}+5$$
$$=2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+5$$
$$=2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$$

したがって，$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ は $t=-\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{9}{2}$ をとる。

$|\vec{a}+t\vec{b}|\geqq 0$ であるから，$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき $|\vec{a}+t\vec{b}|$ も最小となる。

以上から，$\boldsymbol{t=-\frac{1}{2}}$**のとき** $|\vec{a}+t\vec{b}|$ は**最小値** $\sqrt{\dfrac{9}{2}}=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{2}}{2}}$ をとる。

また，$\vec{b}$ と $\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}$ のなす角は

$$\vec{b}\cdot\left(\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{1}{2}|\vec{b}|^2$$
$$=2\cdot 1+(-1)\cdot 1-\frac{1}{2}(1^2+1^2)$$
$$=2-1-\frac{1}{2}\cdot 2=0$$

$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}\neq\vec{0}$ であるから，

$\vec{b}$ と $\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}$ のなす角は $\mathbf{90^\circ}$ である。