$\boxed{1}$

(1)　次の式を展開せよ。

①　$(x+y+1)(x-y+1)$　　　②　$(a+b)^2(a-b)^2$

(2)　$3x^2-5xy-2y^2-8x+2y+4$ を因数分解せよ。

解答

(1)　①　$x+1=A$ とおくと　$(x+y+1)(x-y+1)=(A+y)(A-y)=A^2-y^2=(x+1)^2-y^2$

$$=\boldsymbol{x^2+2x+1-y^2}$$

②　$(a+b)^2(a-b)^2=\{(a+b)(a-b)\}^2=(a^2-b^2)^2=\boldsymbol{a^4-2a^2b^2+b^4}$

(2)　$3x^2-5xy-2y^2-8x+2y+4=3x^2+(-5y-8)x-2(y^2-y-2)$

$$=3x^2+(-5y-8)x-2(y+1)(y-2)$$

$$=\{x-2(y+1)\}(3x+y-2)$$

$$=\boldsymbol{(x-2y-2)(3x+y-2)}$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & \diagup\!\!\!\!\diagdown & -2(y+1) & \longrightarrow & -6y-6 \\ 3 & & y-2 & \longrightarrow & y-2 \\ \hline & & & & -5y-8 \end{array}$$

解　説

式の展開・因数分解

(1)　①　計算回数が少なくなりミスがしづらくなるメリットがあるので，解答では置き換えを利用している。単に展開する問題は必ず正解したいので，時間に余裕があれば工夫せずに分配法則を用いて展開した場合の結果と見比べて，同じになることを確認してもよいだろう。

②　指数法則 $A^2B^2=(AB)^2$ を用いている。

(2)　因数分解では，まず着目する文字について降べきの順に整理することを習慣付けたい。

2

$x=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$，$y=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1)　x^2+y^2　　　　(2)　x^3+y^3

解答

$$x+y=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{6}}{2}=\sqrt{6},\qquad xy=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}=\frac{6-2}{4}=1$$

であるので

(1)　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(\sqrt{6})^2-2\cdot 1=6-2$

　　$=\mathbf{4}$

(2)　$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=(\sqrt{6})^3-3\cdot 1\cdot\sqrt{6}=6\sqrt{6}-3\sqrt{6}$

　　$=\mathbf{3\sqrt{6}}$

別解　$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=\sqrt{6}(4-1)=3\sqrt{6}$

解　説

対称式の値

x，y に関する式で，文字 x と y を入れ替えても，もとの式と同じ式になるものを，x と y の **対称式** という。例えば，$x^2+3xy+y^2$ は x と y を入れ替えると　$y^2+3yx+x^2=x^2+3xy+y^2$ であるから対称式であり、x^2+3xy は x と y を入れ替えると　$y^2+3yx=3xy+y^2$ であるから対称式ではない。

x，y の対称式のうち，$x+y$，xy を **基本対称式** という。対称式は基本対称式で表すことができる。

x^2+y^2，x^3+y^3 は対称式なので，基本対称式 $x+y$，xy を用いて表すことができる。

$$\boldsymbol{x^2+y^2=(x+y)^2-2xy}\qquad\boldsymbol{x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)}$$

〈注意〉上の等式は右辺を展開して確かめることができる。

対称式の値を求める場合は，まず与えられた対称式を基本対称式で表すことを考えるとよい。

(2)の x^3+y^3 は，$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ と因数分解できるので，基本対称式 $x+y$，xy と(1)の x^2+y^2 の値を用いて求めることもできる。複数の解法で答えを求めると検算にもなるので，別解も習得しておきたい。

$\boxed{3}$

関数 $y=-x^2+4x+1$ $(0\leqq x\leqq 5)$ の最大値および最小値を求めよ。

解答

(2)　$y=-x^2+4x+1=-(x^2-4x)+1=-\{(x-2)^2-4\}+1$

$=-(x-2)^2+4+1=-(x-2)^2+5$

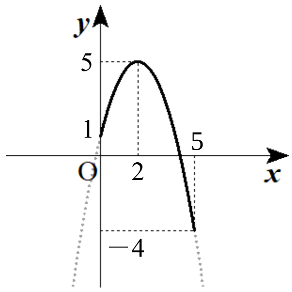
定義域が $0\leqq x\leqq 5$ であるから

右のグラフより，

$x=2$ で最大値 5,

$x=5$ で最小値 -4

をとる。



解　説

2 次関数の最大・最小

2 次関数の問題では，グラフをかくことを習慣付けたい。グラフをかくことで，求めた座標の符号や大小関係が確認でき，ミスを防ぐことができる。

〈注意〉 これは，2 次関数以外の関数でも同様。関数の問題はグラフをかいて考えることを習慣付けたい。

$y=ax^2+bx+c$ は，次のようにして $y=a(x-p)^2+q$ のように変形できる。この変形を **平方完成** という。

$y=ax^2+bx+c$

$=a\left(x^2+\dfrac{b}{a}x\right)+c$　……　x^2の係数でくくる

$=a\left(x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{b^2}{4a^2}-\dfrac{b^2}{4a^2}\right)+c$　……　xの係数の半分の 2 乗を加えて引く

$=a\left\{\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2}{4a^2}\right\}+c$　……　かっこの 2 乗の式を作る

$=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2}{4a}+c$　……　中かっこを展開すれば出来上がり

軸は　直線$x=-\dfrac{b}{2a}$，　頂点の座標は　$\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2}{4a}+c\right)$

定義域に制限がある 2 次関数では，頂点の x 座標が定義域に含まれているかどうかに注目し，

頂点の y 座標，定義域の両端での y 座標を調べる。

$\boxed{4}$
次の不等式を解け。
(1)　$|4x+3| \leqq 3x+4$　　(2)　$-3x^2+5x+2<0$　　(3)　$x^2+6x+9\leqq 0$

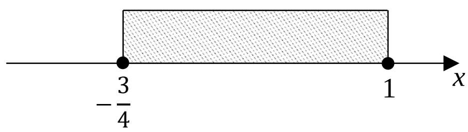
解答

(1)　$|4x+3| \leqq 3x+4$

(ⅰ)　$4x+3 \geqq 0$　すなわち　$x \geqq -\dfrac{3}{4}$ のとき

$4x+3\leqq 3x+4$　　これを解いて　$x\leqq 1$

これと $x \geqq -\dfrac{3}{4}$ の共通範囲は　$-\dfrac{3}{4} \leqq x \leqq 1$　……①



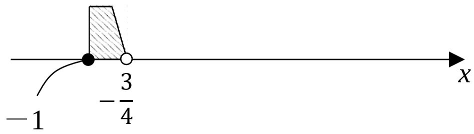
(ⅱ)　$4x+3<0$　すなわち　$x<-\dfrac{3}{4}$ のとき

$-(4x+3)\leqq 3x+4$　　$-4x-3\leqq 3x+4$　　よって　$-7x\leqq 7$　　これを解いて　$x\geqq -1$

これと $x<-\dfrac{3}{4}$ の共通範囲は　$-1 \leqq x < -\dfrac{3}{4}$　……②

(ⅰ)，(ⅱ) から，不等式の解は，①，②を合わせて

$-1\leqq x\leqq 1$



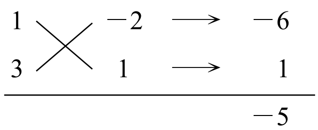
(2)　$-3x^2+5x+2<0$

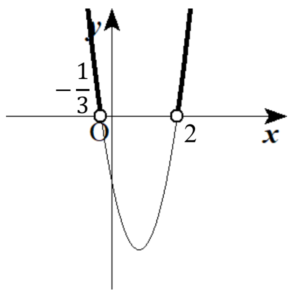
両辺に-1を掛けると　$3x^2-5x-2>0$

$3x^2-5x-2=0$ の解は，

$3x^2-5x-2=(x-2)(3x+1)=0$ より

$x=-\dfrac{1}{3}$，2





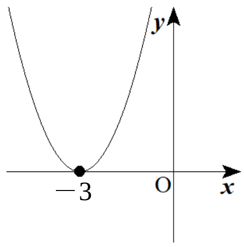
したがって不等式の解は，右の図より　**$x<-\dfrac{1}{3}$，$2<x$**

(3)　$x^2+6x+9\leqq 0$

$x^2+6x+9=0$ の解は，$x^2+6x+9=(x+3)^2=0$ より

$x=-3$

したがって不等式の解は，右の図より　**$x=-3$**



解　説

不等式の問題では，数直線やグラフをかくことを習慣付けたい。数直線やグラフをかくことで，（不等式の解の境界となる）方程式の解の大小関係や不等号の向きが確認できる。
絶対値を含む不等式では，絶対値の中の符号で場合分けをして，絶対値をはずす。得られた解が場合分けの条件を満たすかどうか必ずチェックする。

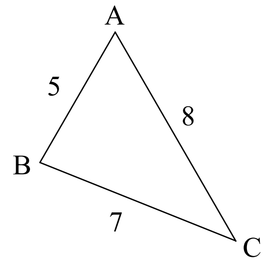
5

△ABC において，AB＝5，BC＝7，CA＝8 のとき，次を求めよ。

(1)　cos∠A　　(2)　△ABC の面積 S

(3)　△ABC の内接円の半径 r

(4)　△ABC の外接円の半径 R



解答

(1)　余弦定理により　$\cos\angle\mathrm{A}=\dfrac{\mathrm{AC}^2+\mathrm{AB}^2-\mathrm{BC}^2}{2\cdot\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AB}}=\dfrac{8^2+5^2-7^2}{2\cdot 8\cdot 5}=\dfrac{40}{80}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(2)　(1)より $\cos\angle\mathrm{A}=\dfrac{1}{2}$ であり，$0°<\angle\mathrm{A}<180°$ のとき $\sin\angle\mathrm{A}>0$ から　$\sin\angle\mathrm{A}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって　$S=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\sin\angle\mathrm{A}=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 8\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{10\sqrt{3}}$

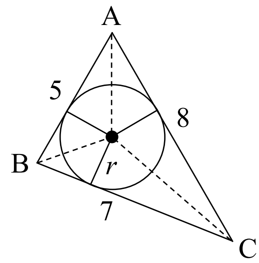
別解　ヘロンの公式を用いる。

$s=\dfrac{\mathrm{BC}+\mathrm{CA}+\mathrm{AB}}{2}=\dfrac{7+8+5}{2}=10$ であるから

$S=\sqrt{s(s-\mathrm{BC})(s-\mathrm{CA})(s-\mathrm{AB})}=\sqrt{10(10-7)(10-8)(10-5)}=10\sqrt{3}$

(3)　$S=\dfrac{1}{2}r(\mathrm{BC}+\mathrm{CA}+\mathrm{AB})$ にそれぞれの値を代入すると

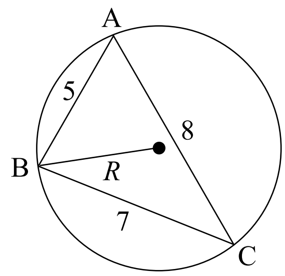
$10\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}r(7+8+5)$　　これを解いて　$\boldsymbol{r=\sqrt{3}}$



(4)　(2)より $\sin\angle\mathrm{A}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから，正弦定理により

$2R=\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin\angle\mathrm{A}}$ から　$2R=\dfrac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

よって　$\boldsymbol{R}=\left(7\div\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\dfrac{1}{2}=7\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{\dfrac{7\sqrt{3}}{3}}$



解　説

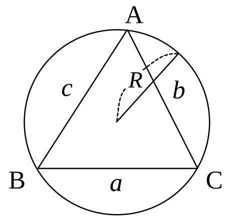
図形と計量

図形の問題では，図をかくことを習慣付けたい。図をかくことで使える公式が分かり，代入ミスを防ぐことができる。また，なるべく条件通りの図をかくと，求めた角や辺の長さ，円の半径等が大体合っているかどうか確認することができる。

図形と計量の公式

正弦定理

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\sin \boldsymbol{A}}=\frac{\boldsymbol{b}}{\sin \boldsymbol{B}}=\frac{\boldsymbol{c}}{\sin \boldsymbol{C}}=\boldsymbol{2R}$$



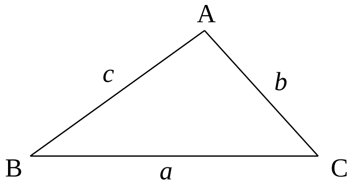
余弦定理

$$\boldsymbol{a^2=b^2+c^2-2bc\cos A},\quad \boldsymbol{b^2=c^2+a^2-2ca\cos B},\quad \boldsymbol{c^2=a^2+b^2-2ab\cos C}$$

三角形の面積

△ABC の面積を S とすると

$$\boldsymbol{S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C}$$



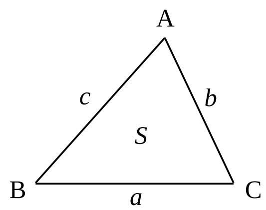
ヘロンの公式

△ABC において，頂点 A，B，C における角の大きさを A，B，C，その対辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ a，b，c，

$s=\dfrac{a+b+c}{2}$，面積を S とすると，等式

$$\boldsymbol{S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

が成り立つ。



$s=\dfrac{a+b+c}{2}$

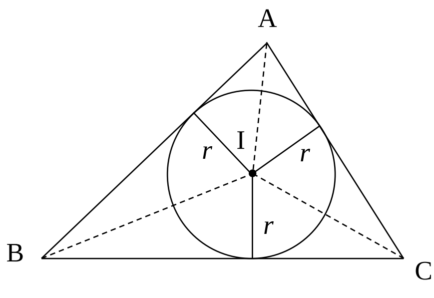
内接円の半径

△ABC の内接円の中心，すなわち，内心を I，面積を S，内接円の半径を r とすると

$$\boldsymbol{S}=\triangle\mathrm{IBC}+\triangle\mathrm{ICA}+\triangle\mathrm{IAB}$$

$$=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}r(a+b+c)}$$



内接円の半径は，3 辺の長さと面積から求めることができる。

6

生徒の学習到達度調査 (PISA) において，各国の読解力の平均得点 x（点）は次の通りであった。

国	日本	韓国	オランダ	カナダ	イギリス	ドイツ	フランス
平均得点 x（点）	490	510	485	515	505	500	495

(1)　データ x の平均値 $\bar{x}$ と，標準偏差 s_x を求めよ。

(2)　次のデータは，各国の 1 日の平均睡眠時間 y（分）である。x と y の相関係数 r を求めよ。
ただし，$\sqrt{6}$＝2.45 とする。

国	日本	韓国	オランダ	カナダ	イギリス	ドイツ	フランス
睡眠時間 y（分）	445	465	495	520	510	490	505

解答

(1)　平均値は　$\boldsymbol{\bar{x}} = \dfrac{1}{7}(490+510+485+515+505+500+495) = \dfrac{3500}{7} = \mathbf{500}$（点）

偏差は　－10，10，－15，15，5，0，－5　（点）

よって，標準偏差は　$\boldsymbol{s_x} = \sqrt{\dfrac{1}{7}\{(-10)^2+10^2+(-15)^2+15^2+5^2+0^2+(-5)^2\}} = \sqrt{\dfrac{700}{7}} = \mathbf{10}$（点）

(2)　(1)から　$\bar{x} = 500$，　$\bar{y} = \dfrac{1}{7}(445+465+495+520+510+490+505) = \dfrac{3430}{7} = 490$

これより，次のような表を作る。

国	x	y	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
日本	490	445	－10	－45	100	2025	450
韓国	510	465	10	－25	100	625	－250
オランダ	485	495	－15	5	225	25	－75
カナダ	515	520	15	30	225	900	450
イギリス	505	510	5	20	25	400	100
ドイツ	500	490	0	0	0	0	0
フランス	495	505	－5	15	25	225	－75
合計	3500	3430			700	4200	600

したがって　$r = \dfrac{600}{\sqrt{700}\sqrt{4200}} = \dfrac{600}{700\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{7} = 2.45 \div 7 = \mathbf{0.35}$

解　説

データの分析

入試では，本問のように各統計量を求める計算問題も出題されるが，正しい文章を選ぶ選択問題も出題される。各公式をしっかり身に付けるとともに，各統計量の意味もしっかりと押さえておきたい。

データの分析の公式

平均値　…【データの特徴を表す最もポピュラーな値。全データを扱うため，極端な値の影響を受ける。】
変量 x の n 個の値 x_1，x_2，……，x_n からなるデータについて，値の合計を個数 n で割った値を **平均値** といい，記号 $\overline{x}$ で表す。

$$\text{平均値}=\frac{\text{変量の値の合計}}{\text{変量の値の個数}},\qquad \overline{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)$$

分散　…【データの散らばりの度合いを表すための指標。分散の単位は観測データの単位の 2 乗となる。】
変量 x の n 個の値 x_1，x_2，……，x_n の平均値を $\overline{x}$ とするとき，$x_1-\overline{x}$，$x_2-\overline{x}$，……，$x_n-\overline{x}$ をそれぞれの値の **偏差** という。偏差の 2 乗の平均値を，変量 x の **分散** といい，s^2 で表す。

$$\text{分散}=(\text{偏差})^2\text{ の平均値},\qquad s^2=\frac{1}{n}\left\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots\cdots+(x_n-\overline{x})^2\right\}$$

〈注意〉x^2 の平均値を $\overline{x^2}$ で表すとき，分散 s^2 は次のようにも表される。

$$\text{分散}=(x^2\text{ の平均値})-(x\text{ の平均値})^2,\qquad s^2=\overline{x^2}-(\overline{x})^2$$

標準偏差　…【標準偏差は, 分散の正の平方根である。標準偏差は, 観測データと単位が揃うので扱いやすい。
標準偏差が大きいと平均値との差が大きい傾向にあり，データの散らばりの度合いが大きい。】
分散の正の平方根を **標準偏差** といい，s で表す。

$$\text{標準偏差}=\sqrt{\text{分散}},\qquad s=\sqrt{\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots\cdots+(x_n-\overline{x})^2\}}$$

〈注意〉x^2 の平均値を $\overline{x^2}$ で表すとき，標準偏差 s は次のようにも表される。

$$\text{標準偏差}=\sqrt{\left(x^2\text{の平均値}\right)-(x\text{の平均値})^2},\qquad s=\sqrt{\overline{x^2}-(\overline{x})^2}$$

共分散　…【2 組の対応するデータ間の関係を表す数値。観測データの大小に左右されるので扱いづらい。】
偏差の積 $(x-\overline{x})(y-\overline{y})$ の平均値を，x と y の **共分散** といい，s_{xy} で表す。

共分散 ＝ 偏差の積の平均値

$$s_{xy}=\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})(y_1-\overline{y})+(x_2-\overline{x})(y_2-\overline{y})+\cdots\cdots+(x_n-\overline{x})(y_n-\overline{y})\}$$

相関係数　…【2 種類のデータ間の関連性（相関関係）の強さを示す指標。相関係数が 1 に近いほど正の相関関係が強く，－1 に近いほど負の相関関係が強い。相関関係がないとき，0 に近い値をとる。】
x の標準偏差 s_x と y の標準偏差 s_y の積 s_xs_y で，共分散 s_{xy} を割った値を **相関係数** といい，r で表す。

$$\text{相関係数}=\frac{x\text{と}y\text{の共分散}}{(\,x\text{の標準偏差}\,)\times(\,y\text{の標準偏差}\,)},\qquad r=\frac{s_{xy}}{s_xs_y}$$

分母と分子にデータの大きさ n を掛けると，次の式が得られる。

$$\text{相関係数}=\frac{(x-\overline{x})(y-\overline{y})\text{ の合計}}{\sqrt{(x-\overline{x})^2\text{の合計}}\sqrt{(y-\overline{y})^2\text{の合計}}}$$

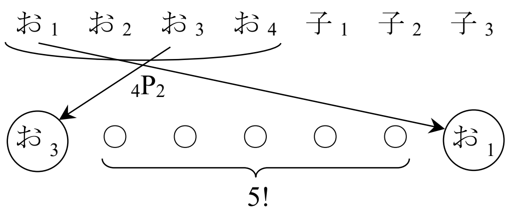
$$r=\frac{(x_1-\overline{x})(y_1-\overline{y})+\cdots\cdots+(x_n-\overline{x})(y_n-\overline{y})}{\sqrt{(x_1-\overline{x})^2+\cdots\cdots+(x_n-\overline{x})^2}\sqrt{(y_1-\overline{y})^2+\cdots\cdots+(y_n-\overline{y})^2}}$$

$\boxed{7}$

(1)　おとな 4 人と子ども 3 人が 1 列に並ぶとき，おとなが両端にくるような並び方は全部で何通りあるか。

(2)　J，U，U，Y，O，U の 6 文字を 1 列に並べる方法は何通りあるか。

解答



(1)　おとなが両端に並ぶ並び方は　${}_4\mathrm{P}_2$ 通り

残り 5 人の並び方は　5! 通り

よって，求める並び方は

$${}_4\mathrm{P}_2\times5!=4\cdot3\times5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=\mathbf{1440}$$（通り）

(2)　J が 1 個，U が 3 個，Y が 1 個，O が 1 個の 6 文字であるから

$$\frac{6!}{1!\ 3!\ 1!\ 1!}=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\times3\cdot2\cdot1\times1\times1}=\mathbf{120}$$（通り）

別解　${}_6\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_3\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1=\frac{6}{1}\times\frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}\times\frac{2}{1}\times\frac{1}{1}=6\times10\times2\times1=120$（通り）

解　説

場合の数

(1)　条件があるものから考える。本問では，「おとなが両端にくる」という条件があるので，まず，おとなが両端にくるような並び方を考える。

(2)　**同じものを含む順列**　…n 個のものの中で，p 個は同じもの，q 個は別の同じもの，r 個はまた別の同じもの，……であるとき，これら n 個のもの全部を 1 列に並べる順列の総数は

$${}_n\mathrm{C}_p\times{}_{n-p}\mathrm{C}_q\times{}_{n-p-q}\mathrm{C}_r\times\cdots\cdots\qquad \text{すなわち}\quad \frac{n!}{p!\,q!\,r!\cdots\cdots}\qquad \text{ただし}\quad p+q+r+\cdots\cdots=n$$

場合の数の公式

順列　異なる n 個のものから r 個取り出して 1 列に並べる順列の総数は

$${}_n\mathrm{P}_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$$（n から始まり 1 ずつ小さくなる数 r 個の積）

1 から n までの自然数の積を n の **階乗** といい，記号 $n!$ で表す。

すなわち　$n!=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1$

円順列　異なるn個のものの円順列の総数は　$\dfrac{{}_n\mathrm{P}_n}{n}=(n-1)!$

重複順列　異なる n 個のものから重複を許して，r 個を取り出して並べる順列の総数は　n^r

組合せ　異なる n 個のものの中から r 個を取る組合せの総数は

$${}_n\mathrm{C}_r=\frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1}=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

ただし，${}_n\mathrm{C}_0=1$ と定める。異なる n 個のものの中から r 個を取ることは，残す $n-r$ 個を決めると考えても同じであるから　${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$

8

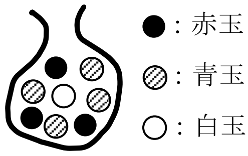
(1)　赤玉 3 個，青玉 4 個，白玉 1 個が入っている袋から 2 個の玉を同時に取り出すとき，次の確率を求めよ。

①　2 個とも同じ色である確率　　　　　　　　②　少なくとも 1 個は赤玉が含まれる確率

(2)　1 個のさいころを 4 回続けて投げるとき，2 以下の目が 3 回出る確率を求めよ。

解答

(1)　①　8 個の玉から 2 個を取り出す場合の数は ${}_8C_2$ 通り。



このうち，2 個とも赤玉である事象 A の起こる場合の数は ${}_3C_2$ 通り。

2 個とも青玉である事象 B の起こる場合の数は ${}_4C_2$ 通り。

事象 A，B は互いに排反であるから，求める確率は

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{{}_3C_2}{{}_8C_2}+\frac{{}_4C_2}{{}_8C_2}=\frac{\frac{3\cdot 2}{2\cdot 1}+\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}}{\frac{8\cdot 7}{2\cdot 1}}=\frac{3+6}{28}=\mathbf{\frac{9}{28}}$$

②　2 個のうち少なくとも 1 個は赤玉が含まれるという事象は，2 個とも赤玉ではないという事象 A の余事象 $\overline{A}$ である。赤玉でないのは青玉 4 個と白玉 1 個の 5 個であるから

$$P(A)=\frac{{}_5C_2}{{}_8C_2}=\frac{\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}}{\frac{8\cdot 7}{2\cdot 1}}=\frac{10}{28}=\frac{5}{14}$$

よって，求める確率は　$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{5}{14}=\mathbf{\frac{9}{14}}$

(2)　さいころを 1 回投げたとき，2 以下の目が出る確率は　$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

よって，求める確率は　${}_4C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(1-\frac{1}{3}\right)^1=4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\frac{2}{3}=\mathbf{\frac{8}{81}}$

解　説

確率の公式

(1)　①　**確率の加法定理**　2 つの事象 A，B が互いに排反のとき　$\boldsymbol{P(A\cup B)=P(A)+P(B)}$

2 個とも赤玉である事象と，2 個とも青玉である事象は互いに排反であることに注意する。また，白玉は 1 個しかないので 2 個とも白玉という事象はないことにも注意する。

②　事象 A に対して，A が起こらないという事象を A の **余事象** といい，$\overline{A}$ で表す。

余事象の確率　　$\boldsymbol{P(\overline{A})=1-P(A)}$

(2)　**反復試行の確率**　　1 回の試行で事象 A の起こる確率を p とする。この試行を n 回繰り返し行うとき，A がちょうど r 回起こる確率は　$\boldsymbol{{}_nC_r\,p^r(1-p)^{n-r}}$

〈注意〉$p^0=1$，$(1-p)^0=1$ とする。

9

右の図において，直線 AT は円 O の点 A における接線であり，

2 点 B，C は円 O 上の点，AB＝3，AC＝2，∠BAC＝∠CAD

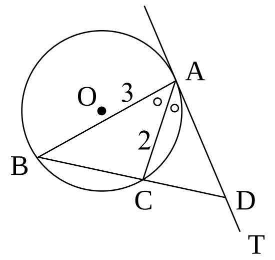
である。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　線分 BC の長さを求めよ。

(2)　AD＝x とするとき，線分 AC が△ABD の∠BAD の二等分線

　であることを利用して，CD を x を用いて表せ。

(3)　線分 AD の長さを求めよ。



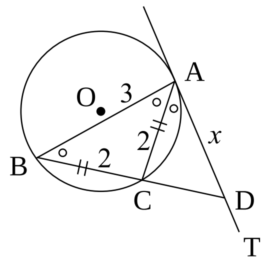
解答

(1)　円の接線と弦の作る角の定理により　∠CAD＝∠ABC

　また，条件より ∠BAC＝∠CAD であるから　∠BAC＝∠ABC

　よって，△CAB は CA＝CB の二等辺三角形である。

　CA＝2 であるから　BC＝**2**



(2)　内角の二等分線と線分の比の性質により

$$\mathrm{BC}:\mathrm{CD}=\mathrm{AB}:\mathrm{AD} \quad \cdots\cdots ①$$

　が成り立つ。BC＝2，AB＝3，AD＝x を①に代入すると

$$2:\mathrm{CD}=3:x \qquad 3\mathrm{CD}=2x \qquad \text{よって} \quad \boldsymbol{\mathrm{CD}=\frac{2}{3}x}$$

(3)　方べきの定理により　$\mathrm{DA}^2=\mathrm{DC}\cdot\mathrm{DB}$　……②

　が成り立つ。　$\mathrm{DA}=x$，　$\mathrm{DC}=\dfrac{2}{3}x$，　$\mathrm{DB}=\mathrm{DC}+\mathrm{CB}=\dfrac{2}{3}x+2$　を②に代入すると

$$x^2=\frac{2}{3}x\left(\frac{2}{3}x+2\right) \qquad x^2=\frac{4}{9}x^2+\frac{4}{3}x \qquad 9x^2=4x^2+12x \qquad 5x^2-12x=0$$

$$x(5x-12)=0 \qquad x=\mathrm{AD}>0 \text{ であるから} \qquad \mathrm{AD}=\boldsymbol{\frac{12}{5}}$$

解　説

図形の性質　…図形の問題では，図をかいて考えよう。

(1)　線分 BC の長さなので辺に関する性質をまず考えるかもしれないが，本問のように，角に関する性質「円の接線と弦の作る角の性質」から辺の長さが分かる場合もある。

(2)　問題文により，角の二等分線と比の性質の利用に気付きたい。

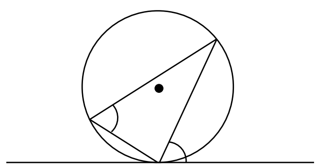
(3)　DB＝DC＋CB とみて方べきの定理を利用することは，定番の解法なので着実に習得したい。

図形の性質の基本事項

円の接線と弦の作る角

円の接線と接点を通る弦の作る角は，この角の内部にある弧に対する

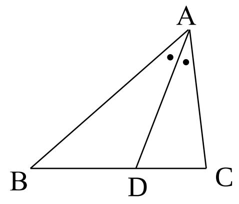
円周角に等しい。　〈注意〉これを，**接弦定理** とよぶこともある。



角の二等分線と比

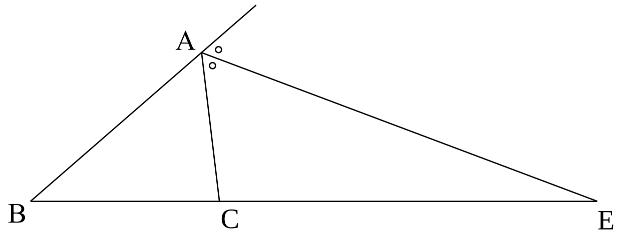
△ABC の∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とすると，D は BC を AB：AC に内分する。

BD：DC＝AB：AC



AB≠AC である△ABC の∠A の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を E とすると，E は BC を AB：AC に外分する。

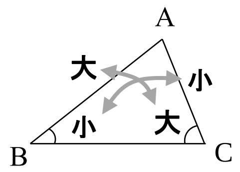
BE：EC＝AB：AC



辺の大小と対角の大小

△ABC において

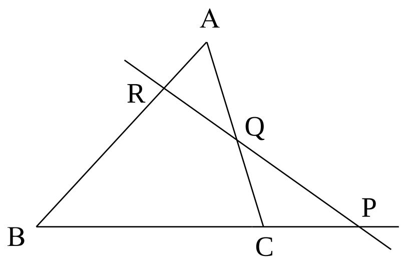
AB＞AC ⇔ ∠C＞∠B



メネラウスの定理

△ABC の 3 辺 BC，CA，AB 上，またはそれらの延長上にそれぞれ三角形の頂点と異なる点 P，Q，R がある。3 点 P，Q，R が一直線上にあるならば

$$\frac{\mathbf{BP}}{\mathbf{PC}}\cdot\frac{\mathbf{CQ}}{\mathbf{QA}}\cdot\frac{\mathbf{AR}}{\mathbf{RB}}=\mathbf{1}$$

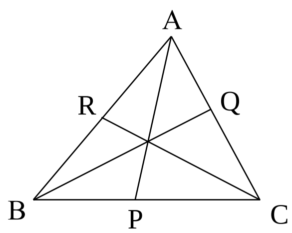


チェバの定理

△ABC の 3 辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ点 P，Q，R がある。

3 直線 AP，BQ，CR が 1 点で交わるならば

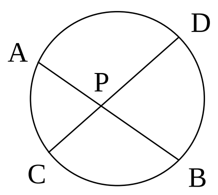
$$\frac{\mathbf{BP}}{\mathbf{PC}}\cdot\frac{\mathbf{CQ}}{\mathbf{QA}}\cdot\frac{\mathbf{AR}}{\mathbf{RB}}=\mathbf{1}$$

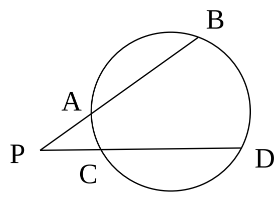


方べきの定理

円の 2 つの弦 AB，CD，またはそれらの延長が点 P で交わるとき

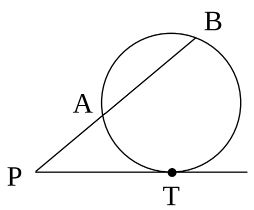
PA・PB＝PC・PD





円の弦 AB の延長上の点 P から，この円に引いた接線の接点を T とするとき

PA・PB＝PT²



１０

次の問いに答えよ。

(1) 126 の正の約数は全部で何個あるか。また，その約数の和を求めよ。

(2) 方程式 $7x-9y=1$ の整数解をすべて求めよ。

(3) ① 次の数を 10 進数で表せ。

(ⅰ) $101_{(2)}$　　(ⅱ) $10.1_{(2)}$

② 次の 10 進数を 2 進数で表せ。

(ⅰ) 47　　(ⅱ) $\dfrac{7}{4}$

解答

(1) 126 を素因数分解すると　$126=2\times3^2\times7$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 126 \\ \hline 3 & 63 \\ \hline 3 & 21 \\ \hline & 7 \end{array}$$

126 の正の約数は　$(2^0+2^1)(3^0+3^1+3^2)(7^0+7^1)$

を展開した項にすべて現れる。

よって，求める正の**約数の個数は**　$(1+1)\times(2+1)\times(1+1)=\mathbf{12}$（個）

約数の和は　$(2^0+2^1)(3^0+3^1+3^2)(7^0+7^1)=(1+2)(1+3+9)(1+7)=3\times13\times8=\mathbf{312}$

(2) $7x-9y=1$　……①

の 1 組の整数解は $x=4$，$y=3$ であるから　$7\times4-9\times3=1$　……②

①－②より　$7(x-4)-9(y-3)=0$　　移項すると　$7(x-4)=9(y-3)$

7 と 9 は互いに素であるから，k を整数として　$x-4=9k$,　$y-3=7k$

したがって，整数解は　$\boldsymbol{x=9k+4,\ y=7k+3}$（**$k$ は整数**）

(3) ① (ⅰ) $101_{(2)}=1\times2^2+0\times2+1\times1=\mathbf{5}$

(ⅱ) $10.1_{(2)}=1\times2+0\times1+1\times\dfrac{1}{2}=2+\dfrac{1}{2}=\boldsymbol{\dfrac{5}{2}}$

② (ⅰ) $47=2\times23+1$

$=2\times(2\times11+1)+1=2^2\times11+2+1$

$=2^2\times(2\times5+1)+2+1=2^3\times5+2^2+2+1$

$=2^3\times(2\times2+1)+2^2+2+1=2^5+2^3+2^2+2+1$

$=1\times2^5+0\times2^4+1\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+1\times2^0$

$=\mathbf{101111_{(2)}}$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 47 \\ \hline 2 & 23 \cdots 1 \\ \hline 2 & 11 \cdots 1 \\ \hline 2 & 5 \cdots 1 \\ \hline 2 & 2 \cdots 1 \\ \hline & 1 \cdots 0 \end{array}$$

(ⅱ) $\dfrac{7}{4}=\dfrac{1\times2^2+1\times2+1\times1}{2^2}=1+1\times\dfrac{1}{2}+1\times\dfrac{1}{2^2}=\mathbf{1.11_{(2)}}$

解　説

整数の性質

(1), (2) 約数の個数や総和の求め方, 2 元 1 次不定方程式の解法は定番なので着実に押さえておきたい。

(3) 10 進法以外の記数法では，2 進法が基本となるので　2 進数 ⇄ 10 進数　の表し方は着実に押さえておきたい。余裕があれば，一般の　n 進数 ⇄ 10 進数　の表し方の練習もしておきたい。

整数の性質の基本事項

倍数の判定法

N を自然数とする。

・N が 2 の倍数 $\Leftrightarrow$ N の一の位の数が偶数

・N が 5 の倍数 $\Leftrightarrow$ N の一の位の数が 0 か 5

・N が 4 の倍数 $\Leftrightarrow$ N の下 2 桁の数が 4 の倍数

・N が 3 の倍数 $\Leftrightarrow$ N の各位の数の和が 3 の倍数

・N が 9 の倍数 $\Leftrightarrow$ N の各位の数の和が 9 の倍数

素因数分解

1 より大きい自然数で，正の約数が 1 とその数だけのものを **素数** という。（1 でも素数でもない自然数を **合成数** という。）

整数がいくつかの正の約数の積で表されるとき，1 つ 1 つの約数をもとの整数の **因数** という。

素数である因数を **素因数** という。整数を素因数の積の形に表すことを **素因数分解** するという。

約数の個数と総和

自然数 N を素因数分解すると， $\boldsymbol{N=p^a q^b r^c}$ であるとき，N の約数の個数，総和は次のようになる。

正の約数の個数　　$\boldsymbol{(a+1)(b+1)(c+1)}$

正の約数の総和　　$\boldsymbol{(1+p+\cdots\cdots+p^a)(1+q+\cdots\cdots+q^b)(1+r+\cdots\cdots+r^c)}$

ユークリッドの互除法

自然数 a を自然数 b で割ったときの商を q，余りを r とする。

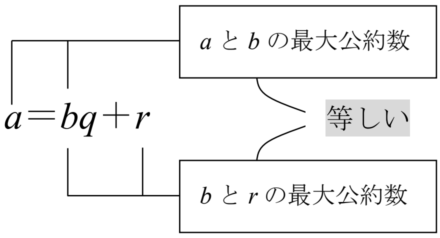
$r>0$ のとき

a と b の最大公約数は，

b と r の最大公約数に等しい。

$r=0$ のとき

a と b の最大公約数は b である。



2 元 1 次不定方程式

自然数 a，b は互いに素で，x，y は整数とする。

$ax=by$ が成り立つならば，x は b の倍数，y は a の倍数である。

記数法

10 の累乗の位取りによる記数法を **10 進法** といい，10 進法で表された数を **10 進数** という。

例えば，10 進数 2016 は　$2\times10^3+0\times10^2+1\times10^1+6$　を表している。

10 進数の各位の数字は，0 以上 9 以下の整数である。

2 の累乗の位取りによる記数法を **2 進法** といい，2 進法で表された数を **2 進数** という。

例えば，2 進数 101 は　$1\times2^2+0\times2^1+1$　を表しているから，10 進数で表すと $4+0+1=5$ となる。

2 進数の各位の数字は，0 または 1 である。10 進数と区別するため，例えば 2 進数 101 は添え字を用いて $101_{(2)}$のように表す。なお，10 進数では，普通 $2016_{(10)}$の$_{(10)}$は省略して，2016 と書く。

一般に，n の累乗の位取りによる記数法を $\boldsymbol{n}$ **進法** といい，n 進法で表された数を $\boldsymbol{n}$ **進数** という。

部屋割り論法（鳩の巣原理）

n 個の部屋に $n+1$ 人以上の人を入れると，いずれかの部屋には 2 人以上入ることになる。